AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

QEYRİ-XƏTTİ FƏRQ TƏNLİKLƏRİ ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

İxtisas: 1211.01 - Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASİYA

İddiaçı: ________________________________ **Kərimli Türkan Səyyaf qızı**

Elmi rəhbər: ____________________ **riy.e.d., prof. Nihan Əlipənah oğlu Əliyev**

Bakı – 2024

Mündəricat

Giriş

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Təqdim olunan dissertasiya işi diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün baxılan Koşi və sərhəd məsələlərinin həllərinin araşdırılmasından bəhs edən əsaslı və əvvəlinci işlərdəndir.

Burada əvvəlcə diskret additiv analiz üçün additiv analizdən bildiyimiz qüvvət funksiyasının və additiv törəmə üçün invariant olan funksiyanın analoqları qurulmuşdur. İnvariant funksiyanın əsasının təyini özünəməxsus xüsusi bir üsulla alınmışdır.

Sonra isə ədədi silsilənin ümumi həddinin qurulması və Fibonaççi ardıcıllığının qurulması, birinci tərtib və ikinci tərtib diskret additiv törəməli differensial tənliklər üçün Koşi məsələsinə gətirilmişdir.

Multiplikativ analizə gəldikdə isə deyə bilərik ki, diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün baxılan məsələlər əvvəlinci işlərdəndir. Diskret additiv analizdə olduğu kimi burada da göstərilmişdir ki, həndəsi silsilənin ümumi həddinin tapılması, birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli differensial tənlik üçün Koşi məsələsinə gətirilir.

Qeyd edək ki, fərqlərlə tənliklər adlandırılan diskret additiv törəməli tənliklərə aid kafi qədər işlər mövcuddur. Ancaq o işlərdə məqsəd diskret additiv analizi bir formaya (qəlibə salmaq deyil) salmaq olmayıb, ancaq köməkçi üsul kimi istifadə edilmiş olur.

Belə ki, ola bilər müəyyən vaxtdan sonra, orta məktəbdə yalnız diskret analizlər, ali məktəblərdə isə kəsilməz analizlərdən bəhs edilə bilər.

Bununla da mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi müəyyənləşmiş olur.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Baxılan diskret məsələlərin tənliklərinin fərdlərlə ifadələri nə qədər mürəkkəb olsa da, bütün baxılan Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır. Belə ki bəzi məsələlərin yeganə həlli, bəzi məsələlərin isə həlləri yeganə olmadıqları halda, yeganə həqiqi həlləri təyin edilmişdir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Burada əsas məqsəd əsasən qeyri-xətti məsələlərin (belə ki, bəzən həm tənlik, həm də şərtlər qeyri-xətti ola bilərlər) həlləri üçün kompakt ifadələrin alınmasıdır. Alınan həllərdə heç bir təqribilik olmadığından bu dəqiq həllərdən istənilən məqsəd üçün istifadə edilə bilər.

Tədqiqat metodları. Əvvəlcə diskret additiv və diskret multiplikativ törəmələrin təriflərindən istifadə etməklə verilmiş məsələnin tənliyinin tərtibi azaldılaraq, bu tənliyin müəyyən sabitlərdən (və ya ardıcıllıqlardan) asılı olan ümumi həlləri qurulur. Sonra isə bu ümumi həllə daxil olan ixtiyari sabitlər verilmiş başlanğıc və ya sərhəd şərtlərinin köməyi ilə təyin olunurlar.

Beləliklə qoyulmuş məsələlərin həlləri üçün analitik ifadələr alınmış olur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

1. Additiv analizdən məlum olan qüvvət funksiyasının və additiv törəmə üçün invariant funksiyaların diskret additiv analizdə analoqlarının qurulması;

2. İkinci və üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli ikihədli tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli;

3. İki müxtəlif diskret additiv və diskret multiplikativ törəmələr, adi, üç tərtibli ikihədli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin analitik həllərinin qurulması.

4. İki dəyişəndən asılı olan diskret additiv və diskret multiplikativ xüsusi törəməli iki hədli diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış və bu məsələlər üçün də əvvəlkilərdə olduğu kimi həllər üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Tədqiqatın elmi yenilikləri aşağıdakılardan ibarətdir:

1. İşdə xətti cəbri tənliklər sistemi diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli differensial tənliklər üçün Koşi və ya sərhəd məsələləri şəklində verilmişdir;

2. İşdə əvvəlcə adi ikinci və üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlər həll edilmişdir;

3. Sonra isə adi diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli differensial tənliklər üçün məsələlərə baxılmış və onların həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır.

4. Nəhayət, xüsusi törəməli diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə baxılmış və onların həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır.

5. Hər fəslin axırında bir kəsilməz törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış və onların həlləri üçün də analitik ifadələr alınmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Nəzəri xarakter daşıyan dissertasiya işində verilmiş məsələlərin həlləri üçün alınan ifadələrdən həllərin təqribi qiymətləri üçün ifadələri də asanlıqla almaq olar.

Belə ki söhbət təqribi həllərdən getdikdə aparılan təqribi həllərin xətalarının qiymətlənməsini də vermək olar.

Aprobasiya və tətbiqi. Dissertasiyanın mövzusuna dair 14 elmi əsər dərc edilmişdir ki,onların 7-si elmi məqalə, 5-i konfrans materialı, 2-si tezisdir. Dissertasiyanın mövzusu ilə bağlı müxtəlif elmi konfranslarda məruzələr edilmiş, yerli və xarici nəşrlərdə məqalələr, konfranslara təqdim olunmuş tezislər çap olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi analizin riyazi üsulları kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi 102715 işarədir (titul səhifəsi 359 işarə, mündəricat 1852 işarə, giriş 33193 işarə, I fəsil 16443 işarə, II fəsil 18675 işarə, III fəsil 16173 işarə, nəticə 1232 işarə).

Riyazi analizdən məlumdur ki, additiv törəmə

$$f^{(\prime)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{0.1}$$

additiv inteqral isə

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\max(\Delta x_i)\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i, \tag{0.2}$$

kimi təyin olunurlar [35], [36],[43],[69]. Bu ifadələrdə h və Δx_i –ləri vahid qəbul etsək, onda diskret additiv törəmə və diskret additiv inteqral üçün aşağıdakı kimi ifadələr alınar:

$$f^{(\prime)}(x) = f(x+1)-f(x), \tag{0.3}$$

burada $x \in N$ və ya $x \in \mathbb{Z}$ qəbul olunur. Ona görə də (0.3)

$$f^{(\prime)}(n) = f(n+1) - f(n), \tag{0.4}$$

və yaxud da

$$f_n^{(\prime)} = f_{n+1} - f_n, \tag{0.5}$$

kimi qəbul olunur [32], [80].

Bu baxımdan (0.2) ifadəsi

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \tag{0.6}$$

şəklinə düşmüş olur.

Həm orta məktəbdə [4] – [6] həm də ali məktəbdə törəmələr hesablandıqda (0.1) ifadəsindən istifadə olunur [35] , [43]. Məsələn.

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2x\cdot h + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Belə ki, $\forall n \in N$ üçün

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{0.7}$$

Ona görə də

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)n,$$

olduğundan

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^{(\prime)} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{0.8}$$

Sabitin törəməsinin sıfır olduğu qəbul edildiyindən (hərçənd ki, törəmə əməli dəyişən kəmiyyətə aiddir, sabiti törəmə işarəsinin daxilinə salmaq olar, oradan kənara da çıxarmaq olar) Eyler belə bir funksiya təyin etmişdir [81].

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{0.9}$$

Belə ki, bu ifadənin hər həddinin törəməsi özündən əvvəlki həddi verdiyindən və birinci həddin törəməsi sıfır olduğundan bu (0.9)- un törəməsi özünü verir, yəni

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)^{(\prime)}=$$

$$=1'+\left(\frac{x}{1!}\right)'+\left(\frac{x^2}{2!}\right)'+\left(\frac{x^3}{3!}\right)'+\cdots+\left(\frac{x^n}{n!}\right)'+\cdots=$$

$$=0+1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$$

Bu (0.9) ifadəsi e^x kimi işarə edilmişdir. Yəni [43]

$$(e^x)'=e^x. \qquad (0.10)$$

Riyazi analiz kursunda bu funksiyanın əsası olan e üçün

$$e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}, \qquad (0.11)$$

kimi ifadə məlumdur [34],[43],[69].

Beləliklə, Eyler yuxarıda verdiyimiz (0.1) törəməsi üçün invariant funksiyanı təyin etmiş oldu.Qeyd edək ki,bir çox tarixi faktlar [1],[21],[35] dən götürülmüşdür.

İndi isə diskret additiv törəmə üçün verdiyimiz (0.5) tərifinə qayıdaq. Bu törəmə üçün qüvvət funksiyasının, yəni (0.7) xassəli funksiyanı və Eylerin qurduğu invariant funksiyanın analoqunu quraq.

Törəmə üçün verdiyimiz (0.5) tərifindən istifadə etsək:

$$(x^2)^{(\prime)}=(x+1)^2-x^2=2x+1. \qquad (0.12)$$

Deməli, x^2-nin diskret additiv törəməsi $2x$ deyil $2x+1$ olar.

Ona görə aşağıdakı kimi funksiya təyin edək, [81] ,[104].

$$\overset{2}{x}=x(x-1). \qquad (0.13)$$

Onda

$$\left(\overset{2}{x}\right)^{(\prime)}=(\overset{2}{x+1})-\overset{2}{x}=(x+1)x-x(x-1)=$$

$$=x[(x+1)-(x-1)]=2x,$$

Deməli

$$\left(\overset{2}{x}\right)^{(\prime)}=2x, \qquad (0.14)$$

eyni qayda ilə

$$\overset{3}{x} = x(x-1)(x-2), \tag{0.15}$$

olduğundan

$$\left(\overset{3}{x}\right)^{(')} = (\overset{3}{x+1}) - \overset{3}{x} = (x+1)x(x-1) - x(x-1)(x-2) =$$

$$= x(x-1)[(x+1)-(x-2)] = 3x(x-1) = 3\overset{2}{x}, \tag{0.16}$$

Beləliklə $\forall n \in N$ üçün [81], [104]:

$$\left(\overset{n}{x}\right)^{(')} = n\overset{n-1}{x}. \tag{0.17}$$

İndi isə e^x-in analoqunu quraq. Yəni (0.5) əməlinə nəzərən invariant funksiya quraq.

Qeyd edək ki, bu sual ilə bir çox şəxslərə (orta və ali məktəblərdə) müraciət edilmişdir. Onlar belə funksiyanın tapılmasında çox çətinliklərlə qarşılaşmışlar.

Mən, analizdən məlum olan (0.11)-ə qayıtmaq istərdim. Neper ədədi adlanan bu ədədin analoqunu diskret additiv analizdə quraq [81], [104]. Yəni (0.11)-də h=1 qəbul etsək:

$$e = (1+1)^{\frac{1}{1}} = 2,$$

olduğunu almış olarıq. Onda:

$$(2^x)^{(')} = 2^{x+1} - 2^x = (2-1)2^x = 2^x, \tag{0.18}$$

invariantın almış oluruq. Qeyd edək ki, diskret additiv analizdə də, adi kəsilməz analizdə olduğu kimi bu invariant funksiya yeganədir.

Beləliklə biz həm qüvvət funksiyasının, həm də törəmə üçün invariant olan funksiyaları diskret additiv törəmə üçün almış oluruq. Bu cür törəməli tənliklər və onlar üçün məsələlərlə [32] , [81] və [104]-də tanış olmaq olar.

Buradan görünür ki, ədədi silsilənin ümumi həddinin tapılması birinci tərtib diskret additiv törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinə, Fibonaççi ardıcılığının qurulması isə ikinci tərtib diskret additiv törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinə gətirilir [81],[104].

Doğrudan da ədədi silsilənin tərifinə əsasən: “İkincidən başlamaqla hər bir hədd, özündən əvvəlki hədlə bu silsilə üçün sabit olan bir ədədin cəminə bərabər” olduğundan [4]-[6]:

$$a_{n+1} = a_n + d, n \geq 1, \tag{0.19}$$

çünki ikincidən başlayaraq, ona görə də birinci hədd verilməlidir, yəni

$$y_1 = \alpha, \tag{0.20}$$

burada α və d verilmiş sabitlərdir. Onda (0.5) tərifindən istifadə etsək, (0.19), (0.20) aşağıdakı kimi olar [4] – [6]:

$$\begin{cases} a_n^{(\prime)} = d, n \geq 1, \\ a_1 = \alpha. \end{cases} \tag{0.21}$$

Eyni qayda ilə Fibonaççi ardıcıllığı “üçüncüdən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki iki həddin cəminə bərabərdir”. Onda [30]:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \tag{0.22}$$

bu ifadəni aşağıdakı kimi yazaq [32], [81], [104]:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_n,$$

(0.5) ifadəsini nəzərə alsaq:

$$a_{n+1}^{(\prime)} = a_n.$$

Alınan ifadəni aşağıdakı kimi yazaq:

$$[(a_{n+1} - a_n) + a_n]^{(\prime)} = a_n,$$

və ya (0.5)-ə əsasən,

$$\left[a_n^{(\prime)} + a_n\right]^{(\prime)} = a_n,$$

yaxud da

$$a_n^{(\prime\prime)} + a_n^{(\prime)} - a_n = 0, n \geq 1. \tag{0.23}$$

Tərifdə üçüncü həddən başladığından birinci və ikinci hədlər verilməlidirlər, yəni:

$$a_1 = \alpha, a_2 = \beta. \tag{0.24}$$

Bununla da (0.23), (0.24) Koşi məsələsi alınır.

Beləliklə görünür ki, (0.1) kəsilməz additiv törəmədə, limiti nəzərə almasaq, iki ardıcıl tərs əməlin nəticəsi kimi “fərqlərin nisbətindən”[3]:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x},$$

ibarətdir.

Bu halda (kəsilməz halda) additiv inteqral, (0.2)-dən göründüyü kimi, yenə də limiti nəzərə almasaq, iki ardıcıl düz əməlin nəticəsi kimi “hasillərin cəmindən” əmələ gəlmişdir [70]:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Diskret hala gəldikdə isə (0.5)-dən göründüyü kimi diskret additiv törəmə yalnız bir tərs əməl “fərq”-in köməyi ilə

$$f_n^{(\prime)} = f_{n+1} - f_n,$$

diskret additiv inteqral isə (0.6)-dan göründüyü kimi yalnız bir düz əməl “cəm”-dən ibarətdir.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k.$$

Bütün bu əməllərdə həm törəmələrdə, həm də inteqrallarda additivlik xassəsi görünür. Yəni “cəmin törəməsi, törəmələrin cəminə”, “cəmin inteqralı isə inteqralların cəminə” bərabər olur [81], [104].

Diskret törəmədə və inteqralda arqument tam ədəd olduğundan, o (arqument) indekslə əvəz edilir. Yəni ardıcıllığın törəməsi (indeksə nəzərən), və ya ardıcıllığın inteqralı (indeksə nəzərən), alınmış olar.

Qeyd edək ki, kəsilməz halda additiv inteqral çox qədimlərdən, hətta Arximedin vaxtından məlum olduğu halda [21], bu halda törəmə çox sonralar, diferensial hesabı yaranandan sonra meydana gəlmişdir. Belə ki, Arximed müəyyən fiqurların həcmini hesabladıqda və ya səthinin sahəsini hesabladıqda həmin fiqurları xırda hissələrinə ayırmaqla, bu xırda hissələrin həcmlərini (onları düzbucaqlı, prizma və ya buna oxşar yaxşı fiqurlarla əvəz etməklə) təyin edərək cəmləmiş və əvvəlki fiqurun həcmi üçün təqribi qiymət almışdır ki, bu da Darbu cəminin analoqudur [34],[43]. Eyni qayda ilə Arximed səthlərin sahələri üçün də təqribi qiymətlər almışdır.

Bəzi fiqurlar üçün alınan bu ifadələr həcmin və ya səthin sahəsinin dəqiq qiymətləri olmuşdur. Bir daha qeyd edək ki, kəsilməz halda additiv törəmə çox sonralar, bu yaxınlarda Nyuton və Leybnitsin işlərində meydana gəlmişdir.

Belə ki, həm orta məktəblərdə, həm də ali məktəblərdə keçirilən törəmə və inteqral bəhsləri "Riyazi analiz kursunun" əsasını təşkil edir [4] – [6],[34]-[36],[43].

Bu əməllərin verdiyi tənliklər ilə (bu tənliklər və onlar üçün qoyulan məsələlər ilə) "inteqral tənliklər" və "diferensial tənliklər" kurslarında məşğul olmuşlar [24],[54],[55],[69]. Sonralar bu əməllər çoxdəyişənli funksiyalar üçün aparılmışdır ki, bu cür məslələr ilə də "Riyazi fizika tənlikləri" və "Xüsusi törəməli tənliklər" kursunda öyrənilmişdir [25],[51],[53],[64].

Multiplikativ törəmə və inteqral, kəsilməz halda bir əsr əvvəl meydana gəlməsinə baxmayaraq [31], onun üçün məsələlərə axır vaxtlar baxılmağa başlanılmışdır [79],[89],[90].

Multiplikativ törəmə və inteqral, kəsilməz halda tərifləri və sadə xassələri [31]-də üç-dörd səhifədə verilmişdir. Belə ki, burada additivlik deyil multiplikativlik xassələri gözlənilmişdir. "Hasilin törəməsi, törəmələrin hasilinə", "Hasilin inteqralı isə inteqralların hasilinə" bərabər olduğu göstərilir.

Diskret multiplikativ analizə gəldikdə isə deyə bilərik ki, onları professor Nihan Əliyev başlayıb, burada olan işarələmələrə qədər, diskret additiv törəməni diskret multiplikativ törəmədən fərqləndirilməsi, diskret additiv intqeralın diskret multiplikativ inteqraldan fərqləndirilməsi (işarələmələrdə) ona məxsusdur [2].

Yuxarıda kəsilməz halda additiv törəmə üçün verilmiş (0.1) ifadəsinə analoji olaraq kəsilməz halda multiplikativ törəmə:

$$f^{[I]}(x) = \lim_{h \to 0} \sqrt[h]{\frac{f(x+h)}{f(x)}}, \tag{0.25}$$

multiplikativ inteqral isə

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max(\Delta x_i)\to 0 \\ n\to\infty}} \prod_{i=0}^{n} f(x_i)^{\Delta x_i}, \qquad (0.26)$$

işarə edilmişdir. Additiv halda olduğu kimi burada da limitləri nəzərə almasaq, multiplikativ törəmə iki ardıcıl tərs əməlin “nisbətin kökü”, multiplikativ inteqral isə iki ardıcıl düz əməlin “qüvvətlərin hasilinin” köməyi ilə alınır.

Diskret hala gəldikdə isə h=1 qəbul edilərsə, multiplikativ törəmə yalnız bir tərs əməl olan “nisbətin” [3],[85]:

$$f_n^{[I]} = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \qquad (0.27)$$

diskret multiplikativ inteqral isə yalnız bir düz əməl “hasilin” köməyi ilə

$$\int_0^n f_k = \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \qquad (0.28)$$

şəkildə verilmiş olur.

Diskret multiplikativ törəməyə ən sadə misal həndəsi silsilənin ümumi həddi üçün olan formulun hesablanmasıdır.

Doğrudan da tərifə görə “ikincidən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki hədlə bu silsilə üçün sabit olan bir ədədin hasilinə bərabərdir”, yəni

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, n \geq 1, \qquad (0.29)$$

burada q verilmiş ədəddir. Bunun hər iki tərəfini a_n-ə bölsək,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, n \geq 1, \qquad (0.30)$$

tərifdə ikincidən başlayaraq hər bir həddən bəhs edildiyindən birinci hədd verilməsidir

$$a_1 = \alpha, \qquad (0.31)$$

burada α – verilmiş ədəddir.

Beləliklə, həndəsi silsilənin ümumi həddinin tapılması məsələsi (0.30), (0.31) Koşi məsələsinin həllinə gətirilir ki, (0.27)-dən göründüyü kimi (0.30) tənliyinin sol tərəfi a_n-in birinci tərtib diskret multiplikativ törəməsidir. Qeyd edək ki, burada Fibonaççi ardıcılığının analoqunu qurmaq olar. Elə ardıcılıq qurmaq olar ki, üçüncüdən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki iki həddin hasilinə bərabər olsun. Bu hadisə diskret multiplikativ törəməli iki tərtib tənlik üçün Koşi məsələsinə gətirilərdi.

Kəsilməz additiv törəməli həm adi diferensial tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərdə [54],[55],[68] həm də riyazi fizika tənlikləri [28],[51],[64] və xüsusi törəməli tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərdə [25],[49] ,[51],[53] həllin araşdırılması çətinlik törətdikdə bu məsələlərdə törəmələr fərqlərlə əvəz edilərək, alınan diskret məsələlər araşdırılır [39] – [42]. Diskret məsələlərin həlli üçün alınan ifadələrdə seçilmiş addımı (və ya addımları) kafi qədər kiçik götürməklə kəsilməz məsələnin həllinin təqribi qiyməti üçün ifadələr almış oluruq [41], [42],[46]-[48].

Qeyd edək ki riyazi modeli diskret törəməli tənliklər üçün məsələlər olan diskret hadisələr həyatda çox azdır.[30],[80]

“Qeyri-xətti fərq tənlikləri üçün məsələlərin həllinin araşdırılması” adlanan dissertasiya işi giriş, üç fəsil və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Girişdə qoyulmuş məsələlərin yaranma tarixindən və inkişaf mərhələlərindən bəhs edilir. Mövzunun aktuallığı və yeniliklər göstərilir.

“İkinci və üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həlli” adlanan birinci fəsil üç hissədən ibarətdir.

Birinci fəslin “İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həlli” adlanan birinci hissəsində

$$y_i^{[II]} = f_i, i \geq 0, \tag{0.32}$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılmışdır [7],[8].

Diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, (0.32) tənliyi aşağıdakı şəklə düşür:

$$\frac{y_{i+2} y_i}{y_{i+1}^2} = f_i, i \geq 0,$$

və ya

$$y_{i+2} = \frac{f_i y_{i+1}^2}{y_i}, i \geq 0 , \tag{0.33}$$

burada i-yə qiymətlər verməklə, alarıq:

$i = 0,$

$$y_2 = f_0 \frac{y_1^2}{y_0},$$

$i = 1,$

$$y_3 = f_1 \frac{y_2^2}{y_1} = \frac{f_1}{y_1} \cdot f_0^2 \frac{y_1^4}{y_0^2} = f_1 f_0^2 \frac{y_1^3}{y_0^2},$$

$i = 2,$

$$y_4 = f_2 \frac{y_3^2}{y_2} = f_2 \cdot \frac{f_1^2 f_0^4 \cdot \frac{y_1^6}{y_0^4}}{f_0 \frac{y_1^2}{y_0}} = f_2 f_1^2 f_0^3 \frac{y_0 y_1^6}{y_1^2 y_0^4} = f_2 f_1^2 f_0^3 \frac{y_1^4}{y_0^3},$$

$i = 3,$

$$y_5 = f_3 \frac{y_4^2}{y_3} = f_3 \cdot \frac{f_2^2 f_1^4 f_0^6 \cdot \frac{y_1^8}{y_0^6}}{f_1 f_0^2 \frac{y_1^3}{y_0^2}} = f_3 f_2^2 f_1^3 f_0^4 \frac{y_1^5}{y_0^4},$$

alınan ifadələrdən göründüyü kimi:

$$y_i = \frac{y_1^i}{y_0^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k}, i \geq 2. \qquad (0.34)$$

Koşi məsələsi: Verilmiş (0.32) tənliyinə

$$y_k = \alpha_k, k = 0,1, \qquad (0.35)$$

başlanğıc şərtini qoşsaq, onda bu məsələnin həlli asanlıqla (0.34)-dən, yəni (0.32)-nin ümumi həllindən alınır. (burada y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir). Bu sabitlərin qiymətini (0.35) başlanğıc şərtindən götürsək, alarıq:

$$y_i = \frac{\alpha_1^i}{\alpha_0^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k}, i \geq 2. \qquad (0.36)$$

Teorem 0.1. Əgər $f_i, i \geq 0$, verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, α_0 və α_1 həqiqi ədədlər olmaqla $\alpha_0 \neq 0$ olarsa, onda (0.32), (0.35) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.36)-nın köməyi ilə verilir.

İndi (0.32) tənliyinə i-nin $\overline{0, N-2}$ qiymətləri üçün baxaraq, bu tənliyə aşağıdakı sərhəd şərtlərini qoşaq:

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta, \qquad (0.37)$$

onda (0.34) ümumi həlli (0.37)-nin ikinci şərtində nəzərə alsaq:

$$\beta = y_N = \frac{y_1^N}{\alpha^{N-1}} \prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}, \tag{0.38}$$

tənliyindən y_1-i təyin edək:

$$y_1^N = \frac{\alpha^{N-1}\beta}{\prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}},$$

və ya

$$y_1 = \sqrt[N]{\frac{\alpha^{N-1}\beta}{\prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}}} \quad . \tag{0.39}$$

Aldığımız (0.39) və (0.32)-ni nəzərə alsaq sərhəd məsələsinin həlli üçün (0.34)-dən:

$$y_i = \frac{\sqrt[N]{\left(\frac{\alpha^{N-1}\beta}{\prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}}\right)^i}}{\alpha^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k} = \frac{\alpha^{1-\frac{i}{N}}\beta^{\frac{i}{N}}}{\prod_{k=0}^{i-2} f_k^{(1+k)\left(i-\frac{i}{N}\right)} \cdot \prod_{k=i-1}^{N-2} f_k^{i-(1+k)\frac{i}{N}}}, i \geq 2. \tag{0.40}$$

ifadəsini almış olarıq.

Belə ki, y_0 (0.37) şərtində, y_1 isə (0.39) da təyin olunmuşdur. Bununla da aşağıdakı hökmü alırıq:

Teorem 0.2. Əgər $f_i, i \geq 0$ müsbət hədli ardıcıllıq, α və β verilmiş müsbət ədədlərdisə, onda (0.32), (0.37) sərhəd məsələsinin müsbət həlli var və bu həll (0.39) və (0.40)-ın vasitəsi ilə verilir.

Qeyd 0.1. y_1 üçün alınan ikihədli cəbri tənliyin həlli yeganə olmadığından baxılan sərhəd məsələsinin həlli yeganə deyildir. *N* – tək olduqda həqiqi həll yeganə olduğu halda, *N* – cüt olarsa, həqiqi həll də yeganə deyil.

Birinci fəslin "Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli" adlanan ikinci hissəsində:

$$y_i^{[III]} = f_i, i \geq 0, \tag{0.41}$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılmışdır [9]. Burada $f_i i \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq $y_i i \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, (0.41) tənliyini açıq şəkildə aşağıdakı kimi fərqlər tənliyi şəklində yaza bilərik:

$$y_{i+3} = f_i \frac{y_{i+2}^3}{y_{i+1}^3} y_i, i \geq 0 \tag{0.42}$$

burada i-yə qiymətlər verməklə, alırıq:

$i = 0$ olarsa

$$y_3 = f_0 \frac{y_2^3}{y_1^3} y_0,$$

$i = 1$ olarsa

$$y_4 = f_1 \frac{y_3^3}{y_2^3} y_1 = f_1 \cdot \frac{f_0^3 \cdot \frac{y_2^9}{y_1^9} y_0^3}{y_2^3} y_1 = f_1 f_0^3 \frac{y_2^{12}}{y_1^8} y_0^3,$$

$i = 2$ olarsa

$$y_5 = f_2 \frac{y_4^3}{y_3^3} y_2 = f_2 \cdot \frac{f_1^3 f_0^9 \cdot \frac{y_2^{36}}{y_1^{24}} y_0^9}{f_0^3 \frac{y_2^9}{y_1^9} y_0^3} \cdot y_2 = f_2 f_1^3 f_0^6 \frac{y_2^{23} y_0^6}{y_1^{15}},$$

$i = 3$

$$y_6 = f_3 \frac{y_5^3}{y_4^3} y_3 = f_3 \cdot \frac{f_2^3 f_1^9 f_0^{18} \cdot \frac{y_2^{84} y_0^{18}}{y_1^{45}}}{f_1^3 f_0^9 \frac{y_2^{36} y_0^9}{y_1^{24}}} \cdot f_0 \frac{y_2^3}{y_1^3} y_0 = f_3 f_2^3 f_1^6 f_0^{10} \frac{y_2^{51} y_0^{10}}{y_1^{24}}$$

Alınan (0.42) qeyri-xətti tənliyində i-yə qiymətlər verməklə alınan ifadələrdən görünür ki, bu tənliyin ümumi həlli üçün analitik ifadənin verilməsi (üç ixtiyari sabit olan y_0, y_1 və y_2-dən asılı) çox mürəkkəb məsələdir. (Əgər tapmaq mümkündürsə)

Ona görə də yenidən (0.41) tənliyinə qayıdıb, diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, üçüncü tərtib tənliyi ikinci tərtib tənliyə gətirək:

$$\frac{y_{i+1}^{[II]}}{y_i^{[II]}} = f_i, i \geq 0, \tag{0.43}$$

burada i-yə qiymətlər verməklə,

$$\frac{y_1^{[II]}}{y_0^{[II]}} = f_0,$$

$$\frac{y_2^{[II]}}{y_1^{[II]}} = f_1,$$

$$\frac{y_3^{[II]}}{y_2^{[II]}} = f_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{i-1}^{[II]}}{y_{i-2}^{[II]}} = f_{i-2},$$

$$\frac{y_i^{[II]}}{y_{i-1}^{[II]}} = f_{i-1}.$$

aldığımız ifadələri tərəf-tərəfə vursaq:

$$\frac{y_i^{[II]}}{y_0^{[II]}} = \prod_{k=0}^{i-1} f_k,$$

və ya

$$y_i^{[II]} = y_0^{[II]} \prod_{k=0}^{i-1} f_k \, , i \geq 1, \qquad (0.44)$$

ifadəsini almış olarıq.

Bununla da verilmiş üç tərtibli, (0.41) tənliyi iki tərtibli (0.44) tənliyinə gətirilmiş oldu, belə ki, $y_0^{[II]}$- ixtiyari sabitdir.

Aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$g_i = g_i\left(y_0^{[II]}, f_k\right) = y_0^{[II]} \prod_{k=0}^{i-1} f_k \, , i \geq 1, \qquad (0.45)$$

onda (0.44) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər

$$y_i^{[II]} = g_i, i \geq 1. \qquad (0.46)$$

İndi isə ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (0.46) tənliyində yenə də diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, tərtibi bir vahid də azaldıb, birinci tərtib tənliyə gətirək:

$$\frac{y_{i+1}^{[I]}}{y_i^{[I]}} = g_i, i \geq 1,$$

burada i-yə qiymətlər verək:

$$\frac{y_2^{[I]}}{y_1^{[I]}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{[I]}}{y_2^{[I]}} = g_2,$$

$$\frac{y_4^{[I]}}{y_3^{[I]}} = g_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{i-1}^{[I]}}{y_{i-2}^{[I]}} = g_{i-2},$$

$$\frac{y_i^{[I]}}{y_{i-1}^{[I]}} = g_{i-1}.$$

və ya

$$\frac{y_i^{[I]}}{y_1^{[I]}} = \prod_{s=1}^{i-1} g_s,$$

yaxud da:

$$y_i^{[I]} = y_1^{[I]} \prod\nolimits_{s=1}^{i-1} g_s\,, i \geq 2. \qquad (0.47)$$

Bununla da aldığımız ikinci tərtib (0.46) tənliyi birinci tərtibli (0.47) tənliyinə gətirildi.

Nəhayət burada da

$$h_i = h_i\left(y_1^{[I]} g_s\right) = y_1^{[I]} \prod\nolimits_{s=1}^{i-1} g_s\,, i \geq 2, \qquad (0.48)$$

əvəzlənməsi aparmaqla (0.47) tənliyini

$$y_i^{[I]} = h_i, i \geq 2, \qquad (0.49)$$

şəklinə salmış oluruq. Nəhayət (0.49) tənliyində diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, onu

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = h_i, i \geq 2, \qquad (0.50)$$

şəklinə salmış olarıq.

$$\frac{y_3}{y_2} = h_2,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = h_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{i-1}}{y_{i-2}} = h_{i-2},$$
$$\frac{y_i}{y_{i-1}} = h_{i-1}$$

Alınan bu ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla:

$$\frac{y_i}{y_2} = \prod_{m=2}^{i-1} h_m,$$

və yaxud

$$y_i = y_2 \prod_{m=2}^{i-1} h_m\,, i \geq 3. \qquad (0.51)$$

alınmış olur.

Beləliklə üçüncü tərtib (0.41) tənliyinin ümumi həllini (0.51) şəklində almış oluruq ki, burada h_i-lər (0.48), g_i-lər (0.45) vasitəsi ilə təyin olunurlar y_0, y_1 və $y_2$ixtiyari sabitlərdir.

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 0.3. Əgər f_i,$i \geq 0$ verilmiş həqiqi sabitlərdirsə, onda üçüncü tərtib (0.41) tənliyinin üç ixtiyari y_0, y_1 və $y_2$sabitlərdən asılı olan ümumi həlli (0.51) vasitəsi ilə verilir, belə ki, h_i-lər (0.48), g_i-lər isə (0.45)-in köməyi ilə təyin olunurlar.

Koşi məsələsi: Verilmiş (0.41) tənliyinə

$$y_k = \alpha_k, k = \overline{0,2}, \qquad (0.52)$$

kimi başlanğıc şərtlər əlavə etsək, onda (0.42) rekurent ifadəsindən istifadə etməklə (0.52) şərtlərinin köməyi ilə y_3-dən başlayaraq, bütün y_i-ləri təyin etmək mümkündür, amma, ixtiyari *i*- üçün y_i-ni vermək mümkün deyil (Əgər əvvəlki y_{i-1}, y_{i-2} və s.lər təyin olunmayıbsa). Ona görə (0.52)-ni nəzərə almaqla

$$y_1^{[II]} = \frac{y_0 y_2}{y_1^2} = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1^2}\,, y_1^{[I]} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \qquad (0.53)$$

ifadələrinin köməyi ilə (0.45) və (0.48)-dən alarıq:

$$g_i = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1^2} \prod_{k=0}^{i-1} f_k\,, i \geq 1, h_i = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \prod_{s=1}^{i-1} g_s\,, i \geq 2, \qquad (0.54)$$

Onda (0.52)-ni nəzərə almaqla (0.51)-dən Koşi məsələsinin həlli üçün

$$y_i = \alpha_2 \prod_{m=2}^{i-1} h_m\,, i \geq 3, \qquad (0.55)$$

ifadəsi alınmış olur. Beləliklə alırıq.

Teorem 0.4. Teorem 0.3-ün şərtləri daxilində, əgər verilmiş α_0, α_1 və α_2 müsbət ədədlər olarsa, onda (0.41), (0.52) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.55) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_i və h_i-lər (0.54) kimi təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə üçüncü tərtib (0.41) tənliyinə i-nin $\overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, alınan tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri verək:

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta, y_N = \gamma. \tag{0.56}$$

Asanlıqla görünür ki, (0.42) rekurent ifadəsindən üçüncü sərhəd şərti üçün istifadə etmək mümkün deyil.

Ona görə üçüncü tərtib (0.41) tənliyinin ümumi həlli olan (0.51) ifadəsini (0.56) sərhəd şərtinin üçüncüsündə nəzərə alsaq:

$$\gamma = y_N = y_2 \prod_{m=2}^{N-1} h_m, \tag{0.57}$$

burada h_m-lər (0.48)-dən təyin olunmuşlar. Yəni

$$\gamma = y_2 \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\frac{y_2}{y_1} \prod_{s=1}^{m-1} g_s\right), \tag{0.58}$$

g_s-lər isə (0.45)-dan təyin olunmuşlar. Onda (0.58)-dən alınan

$$\gamma = y_2^{N-1} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\beta^{-1} \prod_{s=1}^{m-1} \left(\frac{\alpha y_2}{\beta^2} \prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)\right) =$$

$$= y_2^{N-1} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\beta^{-1} y_2^{m-1} \prod_{s=1}^{m-1} \left(\alpha\beta^{-2} \prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)\right) =$$

$$= y_2^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\beta^{-1} \prod_{s=1}^{m-1} \left(\alpha\beta^{-2} \prod_{k=0}^{s-1} f_k\right)\right) =$$

$$= \frac{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} y_2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\beta^{N(N-2)}} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{m-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k$$

tənliyindən y_2 aşağıdakı kimi təyin edilmiş olur.

$$y_2^{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{\gamma\beta^{N(N-2)}}{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \cdot \prod_{i=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{i-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k}$$

və yaxud da

$$y_2 = \sqrt[\frac{N(N-1)}{2}]{\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}}{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \cdot \prod_{i=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{i-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}} = \left(\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}}{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \prod_{i=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{i-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}\right)^{\frac{2}{N(N-1)}}. \quad (0.59)$$

Onda sərhəd məsələsinin həlli (0.51)-dən aşağıdakı şəkildə alınmış olur.

$$y_i = \left(\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}\alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{p=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{p-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}\right)^{\frac{2}{N(N-1)}} \cdot \prod_{m=2}^{i-1} h_m. \quad (0.60)$$

Burada h_m-lər (0.48)-dən

$$h_m = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}\alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{p=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{p-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}\right)^{\frac{2}{N(N-1)}} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} g_s \; m \geq 2, \quad (0.61)$$

g_s-lər isə (0.45)-dan

$$g_s = \frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}\alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{p=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{p-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}\right)^{\frac{2}{N(N-1)}} \cdot \prod_{k=0}^{s-1} f_k \; s \geq 1, \quad (0.62)$$

kimi təyin edilmiş olurlar. Beləliklə alırıq.

Teorem 0.5. Teorem 0.3-ün şərtləri daxilində, əgər $f_k > 0$, α, β və γ verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (0.41), (0.56) sərhəd məsələsinin müsbət həlli var və bu həll (0.60) şəklindədir, belə ki, h_m-lər (0.61), g_s-lər (0.62) vasitəsi ilə verilmiş olurlar (bütün köklərin müsbət qiymətləri götürülür).

Birinci fəslin üçüncü hissəsində bir kəsilməz törəməli diferensial tənlik üçün məsələlərə baxılmışdır. Diskret hallarda olduğu kimi bu kəsilməz halda da məsələlərin həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Dissertasiya işinin "Üçüncü tərtib qarışıq diskret törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması" adlanan ikinci fəsli üç hissədən ibarətdir. İkinci fəslin "Diskret additiv törəmənin ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərin həlli" adlanan birinci hissəsində [8]:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[II]} = f_n, n \geq 0, \quad (0.63)$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılmışdır. Burada f_n,$n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq y_n,$n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Birinci fəslin birinci hissəsində (0.34)-ün nə cür alındığına nəzər yetirsək, onda (0.63)-dən alarıq:

$$y_n^{(I)} = \frac{\left(y_1^{(I)}\right)^n}{(y_0)^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-2} f_k^{n-1-k}, n \geq 2, \qquad (0.64)$$

buradan da n-ə qiymətlər verməklə, alarıq:

$$y_2^{(I)} = y_3 - y_2 = \frac{\left(y_1^{(I)}\right)^2}{y_0} f_0,$$

$$y_3^{(I)} = y_4 - y_3 = \frac{\left(y_1^{(I)}\right)^3}{\left(y_0^{(I)}\right)^2} \prod_{k=0}^{1} f_k^{2-k},$$

$$y_4^{(I)} = y_5 - y_4 = \frac{\left(y_1^{(I)}\right)^4}{\left(y_0^{(I)}\right)^3} \prod_{k=0}^{2} f_k^{3-k},$$

$$\dots \dots$$

$$y_{n-1}^{(I)} = y_n - y_{n-1} = \frac{\left(y_1^{(I)}\right)^{n-1}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{n-2}} \prod_{k=0}^{n-3} f_k^{n-2-k}.$$

Bunları tərəf-tərəfə cəmləsək:

$$y_n = y_2 + \sum_{s=0}^{n-3} \frac{\left(y_1^{(I)}\right)^{s+2}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k}, n \geq 3, \qquad (0.65)$$

və ya

$$y_n = y_2 + \sum_{s=0}^{n-3} \frac{(y_2 - y_1)^{s+2}}{(y_1 - y_0)^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k}, n \geq 3. \qquad (0.66)$$

Bununla da üçüncü tərtib (0.63) tənliyinin ümumi həlli üçün (0.66) ifadəsini almış oluruq. Burada y_0, y_1 və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Üçüncü tərtib (0.63) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k, k = \overline{0,2}, \qquad (0.67)$$

kimi başlanğıc şərtləri verilərsə, onda bu Koşi məsələsinin həlli asanlıqla (0.66) ümumi həllindən

$$y_n = \alpha_2 + \sum_{s=0}^{n-3} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^{s+2}}{(\alpha_1 - \alpha_0)^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k}, n \geq 3, \qquad (0.68)$$

şəkildə alınmış olur.

Teorem 0.6. Əgər $f_n n \geq 0$ həqiqi qiymətli ardıcıllıq olmaqla, $\alpha_k k = \overline{0{,}2}$-lər də həqiqi sabitlər olub, $\alpha_0 \neq \alpha_1$ şərti ödənilirsə, onda (0.63), (0.67) Koşi məsələsinin həlli (0.68) vasitəsi ilə verilir.

Əgər (0.63) tənliyinə n-in $\overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla bu tənlik üçün:

$$y_1 - y_0 = \alpha, y_2 - y_1 = \beta, y_N = \gamma, \tag{0.69}$$

kimi sərhəd şərtləri versək, onda bu sərhəd məsələsinin həllini (0.66) ümumi həllindən ala bilərik. Belə ki, verilmiş (0.69) sərhəd şərtlərinin birinci və ikincisini (0.66) da nəzərə almaqla, alınan ifadəni üçüncü sərhəd, şərtində yazsaq alarıq:

$$\gamma = y_N = y_2 + \sum_{s=0}^{N-3} \frac{\beta^{s+2}}{\alpha^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k},$$

buradan y_2 təyin olunur,

$$y_2 = \gamma - \sum_{s=0}^{N-3} \frac{\beta^{s+2}}{\alpha^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k}. \tag{0.70}$$

Onda (0.63), (0.69) sərhəd məsələsinin həlli (0.66)-dan aşağıdakı şəkildə tapılmış olur.

$$y_n = \gamma - \sum_{s=0}^{N-3} \frac{\beta^{s+2}}{\alpha^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k} + \sum_{s=0}^{n-3} \frac{\beta^{s+2}}{\alpha^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k} =$$

$$= \gamma - \sum_{s=n-2}^{N-3} \frac{\beta^{s+2}}{\alpha^{s+1}} \prod_{k=0}^{s} f_k^{s+1-k}, n \geq 3, \tag{0.71}$$

bununla da alırıq.

Teorem 0.7. Əgər $f_n, n \geq 0$ həqiqi qiymətli ardıcıllıq olmaqla, α, βvə γ - verilmiş həqiqi sabitlər olub, $\alpha \neq 0$ olarsa, onda (0.63), (0.69) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.71) şəklindədir.

Əgər (0.63) tənliyi üçün (0.69) əvəzinə

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta, y_N = \gamma, \tag{0.72}$$

sərhəd şərtləri verilərsə, onda (0.66) ümumi həllindən istifadə etmək çətinlik törədir, belə ki, üçüncü sərhəd şərtindən istifadə etməklə y_2 üçün yüksək dərəcəli çox mürəkkəb cəbri tənlik alınmış olur.

Onun üçün yenidən (0.63) tənliyinə qayıdıb, diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə bu tənliyi

$$\frac{\left(y_{n+1}^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}} = f_n, n \geq 0, \tag{0.73}$$

şəklə salaq. Burada *n*-ə qiymətlər verməklə,

$$\frac{\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}} = f_0,$$

$$\frac{\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]}} = f_1,$$

$$\frac{\left(y_3^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]}} = f_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\left(y_{n-1}^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_{n-2}^{(I)}\right)^{[I]}} = f_{n-2},$$

$$\frac{\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_{n-1}^{(I)}\right)^{[I]}} = f_{n-1}$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə vursaq, müəyyən hədlərin ixtisarından sonra alarıq:

$$\frac{\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}} = \prod_{k=0}^{n-1} f_k,$$

və ya

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = \left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} \prod_{k=0}^{n-1} f_k, n \geq 1. \tag{0.74}$$

Burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$g_n = g_n\left(\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}, f_k\right) = \left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} \prod_{k=0}^{n-1} f_k, n \geq 1. \tag{0.75}$$

Onda (0.74) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = g_n, n \geq 1. \qquad (0.76)$$

Beləliklə üç tərtibli (0.63) tənliyi iki tərtibli (0.76) tənliyinə çevrilmiş olur. Bu tənliyə bir daha diskret multiplikativ törəmənin tərifini tətbiq etsək:

$$\frac{y_{n+1}^{(I)}}{y_n^{(I)}} = g_n, n \geq 1. \qquad (0.77)$$

tənliyini almış oluruq ki, burada da n-ə qiymətlər verməklə,

$$\frac{y_2^{(I)}}{y_1^{(I)}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{(I)}}{y_2^{(I)}} = g_2,$$

$$\frac{y_4^{(I)}}{y_3^{(I)}} = g_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{n-1}^{(I)}}{y_{n-2}^{(I)}} = g_{n-2},$$

$$\frac{y_n^{(I)}}{y_{n-1}^{(I)}} = g_{n-1},$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə vursaq, (0.74)-ə analoji olaraq alarıq:

$$\frac{y_n^{(I)}}{y_1^{(I)}} = \prod_{s=1}^{n-1} g_s,$$

və yaxud, buradan da

$$y_n^{(I)} = y_1^{(I)} \prod_{s=1}^{n-1} g_s, n \geq 2, \qquad (0.78)$$

birinci tərtib tənliyini almış oluruq. Beləliklə üçüncü tərtib (0.63) tənliyini birinci tərtibli (0.78) tənliyinə çevirmiş oluruq.

Burada da

$$h_n = h_n\left(y_1^{(I)}, g_s\right) = y_1^{(I)} \prod_{s=1}^{n-1} g_s, n \geq 2, \qquad (0.79)$$

işarələnməsini qəbul etsək, (0.78) tənliyi

$$y_n^{(I)} = h_n, n \geq 2. \tag{0.80}$$

şəklinə düşmüş olur. Burada diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə

$$y_{n+1} - y_n = h_n, n \geq 2,$$

burada n-ə qiymətlər versək,

$$y_3 - y_2 = h_2,$$

$$y_4 - y_3 = h_3,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} = h_{n-2},$$

$$y_n - y_{n-1} = h_{n-1},$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə cəmləsək, alarıq:

$$y_n = y_2 + \sum_{m=2}^{n-1} h_m \,, n \geq 3, \tag{0.81}$$

Alınan (0.74), (0.78) və (0.81) ifadələrindən görünür ki, (0.63) tənliyi üçün

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} = \alpha, \left(y_1^{(I)}\right) = \beta, y_N = \gamma, \tag{0.82}$$

kimi sərhəd şərtləri verilərsə alınan (0.63), (0.82) sərhəd məsələsinin həlli (analitik şəkildə) asanlıqla alınar.

Nəhayət (0.63) tənliyi üçün (0.72) sərhəd şərtlərinə qayıtsaq alınan sərhəd məsələsinin də həllini (0.81)-dən almaq asan deyildir.

Beləliklə (0.63), (0.72) sərhəd məsələsi həll olunmamış məsələ kimi qalır.

İkinci fəslin "İkinci tərtib diskret multiplikativ törəmənin diskret additiv törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərin həlli" adlanan ikinci hissəsində

$$\left(y_n^{[II]}\right)^{(I)} = f_n, n \geq 0, \tag{0.83}$$

kimi üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərə baxılır. Burada da $f_n, n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq $y_n, n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Bu tənliyi törəmələrin təriflərindən istifadə edərək, açıq şəkildə yazsaq:

$$y_{n+3} = f_n \cdot \frac{y_{n+2}^2}{y_{n+1}} + y_n \frac{y_{n+2}^3}{y_{n+1}^3}, n \geq 0. \tag{0.84}$$

Burada n-ə qiymətlər verməklə y_3-dən başlayaraq bütün y_n-ləri y_0, y_1 və $y_2$vasitəsi ilə (f_n-lərdən də asılılıq mövcuddur) təyin etmək olar. Ancaq (0.84)-ün ümumi həlli üçün analitik ifadə vermək mümkün deyil. Odur ki, (0.83)-ə qayıdıb, diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə, alırıq:

$$y_{n+1}^{[II]} - y_n^{[II]} = f_n, n \geq 0, \tag{0.84}$$

burada n-ə qiymətlər verib, alınan

$$y_1^{[II]} - y_0^{[II]} = f_0,$$
$$y_2^{[II]} - y_1^{[II]} = f_1,$$
$$\vdots$$
$$y_n^{[II]} - y_{n-1}^{[II]} = f_{n-1},$$

ifadələri tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$y_n^{[II]} - y_0^{[II]} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k,$$

və ya

$$y_n^{[II]} = y_0^{[II]} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k, n \geq 1. \tag{0.85}$$

Burada

$$g_n = g_n\left(y_0^{[II]}, f_k\right) = y_0^{[II]} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k, n \geq 1, \tag{0.86}$$

işarələməsini qəbul etsək (0.85) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{[II]} = g_n, n \geq 1. \tag{0.87}$$

Beləliklə verilmiş üç tərtibli (0.83) tənliyi iki tərtibli (0.87) tənliyinə gətirildi. Aldığımız (0.87) tənliyində diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, alarıq:

$$\frac{y_{n+1}^{[I]}}{y_n^{[I]}} = g_n, n \geq 1, \tag{0.88}$$

burada da n-ə qiymətlər verməklə,

$$\frac{y_2^{[I]}}{y_1^{[I]}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{[I]}}{y_2^{[I]}} = g_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{n-1}^{[I]}}{y_{n-2}^{[I]}} = g_{n-2},$$

$$\frac{y_n^{[I]}}{y_{n-1}^{[I]}} = g_{n-1}.$$

onda alınan ifadələri tərəf-tərəfə vursaq, alarıq:

$$\frac{y_n^{[I]}}{y_1^{[I]}} = \prod_{s=1}^{n-1} g_s,$$

və ya

$$y_n^{[I]} = y_1^{[I]} \prod_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2. \tag{0.89}$$

Burada da (0.85)-ə analoji olaraq

$$h_n = h_n\left(y_1^{[I]}, g_s\right) = y_1^{[I]} \prod_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2, \tag{0.90}$$

işarələnməsini qəbul etsək, (0.89) tənliyi

$$y_n^{[I]} = h_n, n \geq 2, \tag{0.91}$$

şəklinə düşmüş olur. Bu tənliyə bir daha diskret multiplikativ törəməsini tətbiq etsək, alarıq:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = h_n, n \geq 2,$$

burada *n*-ə qiymətlər verib,

$$\frac{y_3}{y_2} = h_2,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = h_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} = h_{n-2},$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = h_{n-1},$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla

$$\frac{y_n}{y_2} = \prod_{m=2}^{n-1} h_m,$$

və ya

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{m=2}^{n-1} h_m \,, n \geq 3, \tag{0.92}$$

ümumi həllini almış oluruq. Beləliklə alırıq:

Teorem 0.8. Əgər $f_n, n \geq 0$ verilmiş həqiqi elementli ardıcıllıq olarsa, onda (0.83) tənliyinin ümumi həlli var və bu həll (0.92) şəklindədir, belə ki, h_n-lər (0.90), g_n-lər isə (0.86) şəklindədirlər, $y_0^{[II]}$, $y_1^{[I]}$ və $y_2$ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş üçüncü tərtib (0.83) tənliyinə

$$y_k = \alpha_k, k = \overline{0,2}, \tag{0.93}$$

başlanğıc şərtlər qoşularsa, onda

$$y_1^{[II]} = \frac{y_0 y_2}{y_1^2} = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1^2}, y_1^{[I]} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \tag{0.94}$$

olduğundan (0.83), (0.93) Koşi məsələsinin həlli (0.92)-dən

$$y_n = \alpha_2 \cdot \prod_{m=2}^{n-1} h_m \,, n \geq 3, \tag{0.95}$$

kimi təyin olunur, belə ki, h_n-lər və g_s-lər (0.94)-ü nəzərə almaqla (0.90) və (0.86)-dan təyin olunurlar.

Teorem 0.9. Teorem 0.8-in şərtləri daxilində, əgər verilmiş α_k-lar, ($k = \overline{0,2}$ oladuqda) həqiqi sabitlər olmaqla $\alpha_1 \neq 0$ olarsa, onda (0.83), (0.93) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.95) vasitəsi ilə verilir, belə ki, h_n-lər (0.90), g_n-lər isə (0.86)-dan (0.94)-ün köməyi ilə təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.83) tənliyinə n-in $\overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, alınan tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$y_0^{[II]} = \alpha, y_1^{[I]} = \beta, y_N = \gamma, \tag{0.96}$$

onda (0.86) və (0.90)-da (0.96)-nı nəzərə alsaq:

$$g_n = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \,, n \geq 1, \tag{0.97}$$

$$h_n = \beta \cdot \prod_{s=1}^{n-1} g_s \,, n \geq 2, \tag{0.98}$$

aldığımız (0.97) və (0.98) işarələri g_nvə h_n-i birqiymətli təyin edir, yəni onlarda artıq ixtiyarilik qalmır.

Nəhayət (0.92) ümumi həllini (0.96) sərhəd şərtlərinin üçüncüsündə nəzərə alsaq

$$\gamma = y_N = y_2 \prod_{m=2}^{N-1} h_m.$$

Buradan da y_2 asanlıqla təyin olunmuşlar

$$y_2 = \frac{\gamma}{\prod_{m=2}^{N-1} h_m}. \tag{0.99}$$

Onda sərhəd məsələsinin həlli (0.98)-in köməyi ilə (0.92) ümumi həllindən alınır.

$$y_n = \frac{\gamma}{\prod_{m=2}^{N-1} h_m} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} h_m = \frac{\gamma}{\prod_{m=n}^{N-1} h_m}. \tag{0.100}$$

Beləliklə alırıq:

Teorem 0.10. Teorem 0.8-in şərtləri daxilində, əgər $h_n \neq 0, n \geq 2, \alpha,\ \beta$ və γ verilmiş həqiqi ədədlərdirsə, onda (0.83), (0.96) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.100) şəklindədir, belə ki, h_n-lər (0.98), g_n-lər isə (0.97) vasitəsi ilə verilmiş olurlar.

Bu fəslin üçüncü hissəsində birinci fəsildə olduğu kimi kəsilməz törəməli diferensial tənlik üçün məsələlərə baxılmışdır.

Burada da diskret məsələlərdə olduğu kimi baxılan məsələlərin həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Dissertasiya işinin “Diskret iki ölçülü tənliklər üçün məsələlərin həllinin araşdırılması” adlanan üçüncü fəsli də üç hissədən ibarətdir.

Birinci hissə “İkidəyişənli ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması” adlanır. Burada aşağıdakı tənliyə baxılır:

$$D_2^{[I]} D_1^{[I]} u_{ij} = f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0\ , \tag{0.101}$$

burada $f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq,$u_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$olduqda axtarılan ardıcıllıqdır. Diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə edərək (0.101) tənliyini açıq şəkildə yazsaq, alarıq:

$$u_{i+1,j+1} = f_{ij} \frac{u_{i+1j} \cdot u_{ij+1}}{u_{ij}}, i \geq 0, j \geq 0\ , \tag{0.102}$$

burada *i* və *j*–yə qiymətlər verməklə (0.102) tənliyindən

$$u_{ij} = f_{ij}\frac{u_{i0}\cdot u_{0j}}{u_{00}}\prod_{s=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{i-1} f_{ks}\,, i \geq 1, j \geq 1, \tag{0.103}$$

ifadəsini almış oluruq. Bu ifadə (0.101) tənliyinin ümumi həllidir. Burada $u_{i0}, u_{0j}, i \geq 1, j \geq 1$ və u_{00} ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (0.101) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$u_{i0} = \alpha_{i0}, u_{0j} = \alpha_{0j}, i \geq 1, j \geq 1. u_{00} = \alpha_{00}. \tag{0.104}$$

Onda aldığımız (0.101), (0.104) Koşi məsələsinin həlli aşağıdakı kimi (0.103)-dən təyin edilmiş olar.

$$u_{ij} = \frac{\alpha_{i0}\cdot\alpha_{0j}}{\alpha_{00}}\prod_{s=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{i-1} f_{ks}\,, i \geq 1, j \geq 1. \tag{0.105}$$

Beləliklə alırıq:

Teorem 0.11. Əgər $f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$, olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, $\alpha_{i0}, \alpha_{0j}, i \geq 1, j \geq 1$ həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar, $\alpha_{00} \neq 0$, olarsa onda (0.101), (0.104) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.105) vasitəsi ilə verilir.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.101) tənliyinə *i* və j-in $0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq M-1$ qiymətləri üçün baxıb, onun üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$a_i^{(1)}u_{i0} + a_i^{(2)}u_{iM} = a_i, i \geq 0,$$

$$b_j^{(1)}u_{0j} + b_j^{(2)}u_{Nj} = b_j, j \geq 0, \tag{0.106}$$

Burada $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, a_i$, $b_j^{(1)}, b_j^{(2)}$ və b_j verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar olub, (0.106) sərhəd şərtləri xətti asılı deyil. Bu məsələ üçün alırıq:

Teorem 0.12. Əgər $f_{ij} \neq 0, i \geq 0, j \geq 0$ olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq olub, xətti asılı olmayan (0.106) sərhəd şərtlərinin verilənləri $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, a_i$, $b_j^{(1)}, b_j^{(2)}$ və $b_j i \geq 0, j \geq 0$ olduqda həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar olmaqla $u_{00} \neq 0$ olarsa onda (0.101), (0.106) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.105) şəklindədir, belə ki,

$$u_{i0} = a_i\frac{1}{a_i^{(1)} + a_i^{(2)}\frac{a_0^{(1)}}{a_0}\prod_{s=0}^{M-1}\prod_{k=0}^{i-1} f_{ks}}, i \geq 1,$$

$$u_{0j} = b_j \frac{1}{b_j^{(1)} + b_j^{(2)} \frac{b_0^{(1)}}{b_0} \prod_{s=0}^{j-1} \prod_{k=0}^{N-1} f_{ks}}, j \geq 1,$$

ifadələri təyin edilmiş olsunlar:

Üçüncü fəslin "Üçüncü tərtib qarışıq diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması" adlanan ikinci hissəsində

$$D_2^{[I]} D_1^{(II)} u_{ij} = f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0 \,, \qquad (0.107)$$

tənliyi üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmışdır.

Burada f_{ij} verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar, u_{ij} isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Bu tənlik üçün də əvvəlki hissədə olduğu kimi tərifdən istifadə edərək açıq şəkildə:

$$u_{i+2,j+1} = 2u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} +$$

$$+f_{ij}\left(u_{2+ij} - 2u_{i+1j} + u_{ij}\right), i \geq 0, j \geq 0$$

yazıb, alınan tənliyin ümumi həlli üçün analitik ifadə alına bilinmədiyindən (0.107) tənliyinə diskret multiplikativ törəmənin tərifini tətbiq etməklə, bu tənliyi ikinci tərtib

$$D_1^{(II)} u_{ij} = g_{ij}, i \geq 0, j \geq 0 \qquad (0.108)$$

tənliyinə gətirmək olur, burada

$$g_{ij} = g_{ij}\left(D_1^{(II)} u_{i0}, f_{ik}\right) = D_1^{(II)} u_{i0} \prod_{k=0}^{i-1} f_{ik} \,, j \geq 1, \qquad (0.109)$$

işarələməsi qəbul edilmişdir.

Aldığımız (0.108) tənliyində diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə alırıq:

$$u_{ij} = u_{1j} + (i-1) D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kj} \,, i = 2, j \geq 1 \qquad (0.110)$$

Beləliklə alırıq:

Teorem 0.13. Əgər f_{ij} verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq olarsa onda (0.107) tənliyinin ümumi həlli (0.110) şəklindədir, belə ki, $D_1^{(II)} u_{i0}, D_1^{(I)} u_{0j}$ və u_{1j} ixtiyari hədli ardıcıllıqlardır

Koşi məsələsi: Üçüncü tərtib diskret törəməli (0.107) tənlik üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$u_{ij} = \alpha_{ij}, i \geq 0; j = 0; i = 0; j \geq 0; i = 1; j \geq 0 \qquad (0.111)$$

Burada α_{ij} verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardır.

Onda

$$\begin{cases} D_1^{(II)} u_{i0} = u_{i+2,0} - 2u_{i+1,0} + u_{i,0} = \alpha_{i+2,0} - 2\alpha_{i+1,0} + \alpha_{i,0}, i \geq 0, \\ D_1^{(I)} u_{0j} = u_{1j} - u_{0j} = \alpha_{1j} - \alpha_{0j}, j \geq 0, \\ u_{1j} = \alpha_{1j}, j \geq 0, \end{cases} \qquad (0.112)$$

ifadəsini nəzərə alsaq, (0.109) və (0.110)-dan

$$g_{ij} = \left(\alpha_{i+2,0} - 2\alpha_{i+1,0} + \alpha_{i,0}\right) \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}, i \geq 0, j \geq 1, \qquad (0.113)$$

$$u_{ij} = \alpha_{ij} + (i-1)\left(\alpha_{ij} - \alpha_{0j}\right) + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kj}, i \geq 2, j \geq 1, \qquad (0.114)$$

beləliklə, aşağıdakı hölmü almış oluruq:

Teorem 0.14. Teorem 0.13-ün şərtləri daxilində, əgər α_{ij}-lər verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar olarsa, onda (0.107), (0.114) Koşi məsələsinin həlli var və bu həll (0.114) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_{ij} (0.113) kimi təyin edilmiş olurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.107) tənliyinə $0 \leq i \leq N-2, 0 \leq j \leq M-1$ qiymətlərində baxmaqla bu tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri verək:

$$\begin{cases} D_1^{(II)} u_{i0} + a_i u_{NM} = A_i, i \geq 0, \\ D_1^{(I)} u_{0j} + b_j u_{NM} = B_j, j \geq 0, \\ u_{1j} + c_j u_{Nj} = C_j, j \geq 0. \end{cases} \qquad (0.115)$$

Burada a_i, A_i, b_j, B_j, c_j və C_j-lər verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardır.

Onda (0.109) və (0.110)-dan alarıq:

$$g_{ij} = (A_i - a_i u_{NM}) \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}, i \geq 0, j \geq 1, \qquad (0.116)$$

$$u_{ij} = \left(C_j - c_j u_{Nj}\right) + (i-1)\left(B_j - b_j u_{NM}\right) + + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kj}, i \geq 2, j \geq 1. \qquad (0.117)$$

Burada (0.117)-də $i = N, j = M$ götürməklə, alınan ifadədə (0.116)-nı $i = k, j = M$ götürməklə nəzərə alsaq u_{NM} üçün

$$u_{NM} = [C_M + (N-1)B_M] - [C_M + (N-1)b_M]u_{NM} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} A_k \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip} - u_{NM} \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} a_k \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip}$$

ifadəsini, buradan da,

$$\Delta = 1 + C_M + (N-1)b_M + \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} a_k \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip} \neq 0, \qquad (0.118)$$

şərti daxilində

$$u_{NM} = \frac{1}{\Delta}\left[C_M + (N-1)B_M + \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} A_k \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip}\right]. \qquad (0.119)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 0.15. Teorem 0.13-ün şərtləri daxilində, əgər a_i, A_i, b_j, B_j, c_j və C_j-lər verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar olmaqla, (0.118) şərti ödənilərsə onda (0.107), (0.115) sərhəd məsələsinin həlli var və bu həll (0.117) şəklindədir, belə ki, g_{ij}-lər (0.119)-un vasitəsi ilə (0.116)-dan, həll isə (0.119), (0.116)-nın köməyi ilə (0.117)-dən təyin edilmiş olur.

Əvvəlki fəsillərdə olduğu kimi bu fəsildə də axırıncı üçüncü hissə çoxölçülü kəsilməz törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmışdır.

Burada da baxılan məsələlərin həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Beləliklə, bütün fəsillər kəsilməz törəməli diferensial tənliklər üçün məsələlər ilə yekunlaşır.

I Fəsil

İKİNCİ VƏ ÜÇÜNCÜ TƏRTİB DİSKRET MULTİPLİKATİV TÖRƏMƏLİ TƏNLİK ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİ

1.1. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həlli

Məlumdur ki, bir neçə diskret hadisələr mövcuddur. Onlardan ədədi silsilənin ümümi həddinin tapılması məsələsini [4, VIII, “Cəbr”] və Fibonaççi ardıcıllığının qurulması məsələsini göstərmək olar [35]. Bu məsələlər adi diskret additiv törəməli sabit əmsallı xətti diferensial tənliklər üçün (fərqlərlə tənliklər üçün) Koşi məsələsinə gətirilmiş olurlar [32], [70]. Diskret analizin əsas məsələsi isə adi və ya xüsusi törəməli tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərin həllinin tapılması zamanı baxılan məsələlərdə törəmələri fərqlərlə əvəz edərək,alınan diskret additiv törəməli tənlikləri həll edib,alınan ifadədə addımı sıfra yaxınlaşdırmaqla (funksiyanın təyin olunma oblastını hansı addımla kiçik intervallara bölmüşüksə) kəsilməz məsələnin həlli haqqında müəyyən bir fikir söylənilir (həllin varlığı,yeganəliyi və korrektliyi haqda)[58]-[64].[66]-[68],[73]-[78], yuxarıda söylədiyimiz iki diskret hadisəyə daha bir diskret hadisə qoşa bilərik. Həndəsi silsilənin ümumi həddinin qurulması məsələsi [85]. Bu məsələ bizi diskret multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinə gətirmiş olur [95]. Qeyd edək ki, alınan məsələ artıq xətti məsələ olmaya bilər.

Bununla da biz əsasən qeyri-xətti tənliklər üçün qoyulmuş məsələlər ilə məşğul olacağıq. Ola bilər ki, hətta verilən şərtlər də qeyri-xətti olsunlar. Beləliklə, aşağıdakı kimi qeyri-xətti tənliyə baxaq:

$$y_i^{[II]} = f_i, \qquad\qquad i \geq 0, \tag{1.1.1}$$

Burada $f_i, i \geq 0$ olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, $y_i, i \geq 0$isə axtarılan ardıcıllıqdır. Diskret multiplikativ törəmənin

$$y_i^{[I]} = \frac{y_{i+1}}{y_i}, i \geq 0, \tag{1.1.2}$$

tərifindən istifadə etməklə, verilmiş (1.1.1) tənliyini aşağıdakı kimi açıq şəkildə yazaq:

$$y_{i+2} = \frac{y_{i+1}^2}{y_i} f_i, i \geq 0, \tag{1.1.3}$$

burada i-yə qiymətlər verməklə y_i-ləri təyin etməyə çalışaq. Belə ki,

1. $i = 0$ olduqda (1.1.3)-dən alırıq:

$$y_2 = \frac{y_1^2 \cdot f_0}{y_0} . \tag{1.1.4}$$

Burada $f_0$verilmiş həqiqi ədəd, y_0və $y_1$isə ixtiyari sabitlərdir, $y_2$isə f_0,y_0 və y_1 vasitəsi ilə birqiymətli şəkildə təyin edilmiş olur.

2. $i = 1$ olarsa (1.1.3)-dən alarıq:

$$y_3 = \frac{y_2^2 \cdot f_1}{y_1},$$

Burada (1.1.4)-ü nəzərə alsaq:

$$y_3 = \frac{y_1^4 f_0^2}{y_0^2 y_1} f_1 = \frac{f_1}{y_1} \cdot f_0^2 \frac{y_1^4}{y_0^2} = f_1 f_0^2 \frac{y_1^3}{y_0^2}, \tag{1.1.5}$$

ifadəsini almış olarıq.

3. Yenə (1.1.3)-ə qayıdıb , $i = 2$ olduğunu qəbul etsək:

$$y_4 = f_2 \frac{y_3^2}{y_2},$$

ifadəsi alınar.

Burada isə (1.1.4) və (1.1.5) ifadələrini nəzərə alsaq:

$$y_4 = f_2 \frac{y_3^2}{y_2} = f_2 \cdot \frac{y_1^6 f_1^2 f_0^4 \cdot y_0}{f_0 y_1^2 \cdot y_0^4} = f_2 f_1^2 f_0^3 \frac{y_1^4}{y_0^3}, \tag{1.1.6}$$

alınmış olar.

Beləliklə (1.1.4)-(1.1.6)-dan göründüyü kimi (1.1.3)-ün həlli üçün aşağıdakı ifadəni vermək olar:

$$y_i = \frac{y_1^i}{y_0^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k} , \quad i \geq 2. \tag{1.1.7}$$

Bu ifadənin doğruluğunu riyazi induksiya üsulu ilə isbat edək.

Aldığımız (1.1.4)-(1.1.6) ifadələrindən görünür ki,(1.1.7)ifadəsi i=2,i=3 və i=4 üçün doğrudur.

İndi qəbul edək ki, (1.1.7) ifadəsi $i \leq m$üçün doğrudur,yəni

$$y_i = \frac{y_1^i}{y_0^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k}, m \geq 2; i \leq m, \tag{1.1.8}$$

(1.1.8)-in doğruluğunu qəbul edib,(1.1.7)-nin i=m+1 üçün ödənildiyini göstərək.

Bunun üçün (1.1.3)-ə qayıdıb,orada i=m – 1 qəbul edək:

$$y_{m+1} = \frac{y_m^2}{y_{m-1}} f_{m-1},$$

Burada (1.1.8)-i nəzərə alaq:

$$y_{m+1} = \frac{y_1^{2m}\left(\prod_{k=0}^{m-2} f_k^{m-1-k}\right)^2 y_0^{m-2}}{y_0^{2m-2} \cdot y_1^{m-1} \prod_{k=0}^{m-3} f_k^{m-2-k}} f_{m-1} =$$

$$= \frac{y_1^{m+1}}{y_0^m} \cdot \frac{(f_0^{m-1})^2 (f_1^{m-2})^2 \dots (f_{m-2}^{\partial})^2}{f_0^{m-2} \cdot f_1^{m-3} \cdot \dots f_{m-3}} f_{m-1} =$$

$$= \frac{y_1^{m+1}}{y_0^m} \cdot f_0^{2m-2-(m-2)} \cdot f_1^{2m-4-(m-3)} \dots f_{m-3}^{4-1} f_{m-2}^2 f_{m-1} = \frac{y_1^{m+1}}{y_0^m} \prod_{k=0}^{m-1} f_k^{m-k}, m \geq 1 \tag{1.1.9}$$

Bu isə (1.1.7)-də olan ifadənin i=m+1 üçün aldığı qiymətdir. Beləliklə (1.1.7) ifadəsinin doğruluğu riyazi induksiya üsulu ilə isbat edilmiş oldu.İndi isə (1.1.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi hökmü söyləyə bilərik.

Teorem 1.1.1.Verilmiş (1.1.1) qeyri-xətti fərqlərlə tənliyi üçün$f_i, i \geq 0$olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa,onda bu tənliyin ümumi həlli (1.1.7)şəklindədir, burada olan y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (1.1.1) tənliyi üçün

$$y_i = \alpha_i, i = 0,1, \tag{1.1.10}$$

kimi başlanğıc şərtlərinə baxaq, burada α_0 və α_1 verilmiş həqiqi ədədlərdir. Onda (1.1.7) ümumi həllində verilmiş (1.1.10) başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq, (1.1.1), (1.1.10) Koşi məsələsinin həlli

$$y_i = \frac{\alpha_1^i}{\alpha_0^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k}, i \geq 2, \qquad (1.1.11)$$

şəklində alınmış olar.Bununla da alırıq:

Teorem 1.1.2. Teorem 1.1.1.-in şərtləri daxilində,əgər $\alpha_i, (i = 0,1)$ -lər verilmiş $\alpha_0 \neq 0$, həqiqi ədədlərdisə, onda (1.1.1), (1.1.10) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (1.1.11) şəklindədir.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (1.1.1) tənliyinə i indeksinin $\overline{0, N-2}$qiymətləri üçün baxmaqla,onun üçün aşağıdakı kimi şərtləri verək:

$$y_0 = \alpha, y_N = \beta, \qquad (1.1.12)$$

Burada α və β verilmiş həqiqi ədədlərdir. Onda (1.1.12) sərhəd şərtlərinin birincisini (1.1.7) ümumi həllində nəzərə almaqla,bu ümumi həll aşağıdakı şəklə düşmüş olar:

$$y_i = \frac{y_1^i}{\alpha^{i-1}} \prod_{k=0}^{i-2} f_k^{i-1-k}, i \geq 2. \qquad (1.1.13)$$

İndi aldığımız (1.1.13) ifadəsində (1.1.12) sərhəd şərtlərindən ikincisini nəzərə alsaq, $y_1$üçün

$$\beta = y_N = \frac{y_1^N}{\alpha^{N-1}} \cdot \prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}$$

cəbri tənlik almış olarıq.

Buradan y_1-i təyin edək:

$$y_1^N = \frac{\alpha^{N-1} \cdot \beta}{\prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}}, f_k \neq 0, \qquad (1.1.14)$$

və

$$y_1 = \left(\frac{\alpha^{N-1} \cdot \beta}{\prod_{k=0}^{N-2} f_k^{N-1-k}} \right)^{\frac{1}{N}}. \qquad (1.1.15)$$

Aldığımız (1.1.14) tənliyi N-dərəcəli cəbri tənlik olduğundan, onun kompleks ədədlər meydanında N kökü olmalıdır. Biz bu köklərdən həqiqi ola biləcək (1.1.15) ilə kifayətlənək. Onda (1.1.15)-i (1.1.13)-də yazmaqla sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı şəkildə almış olarıq:

$$y_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-2} f_k^{\,i-1-k}}{\alpha^{i-1}} \cdot \left(\frac{\alpha^{N-1} \cdot \beta}{\prod_{k=0}^{N-2} f_k^{\,N-1-k}} \right)^{\frac{i}{N}}, \quad 2 \le i \le N-1, \qquad (1.1.16)$$

Bununla da aşağıdakı hökmü almış olarıq:

Teorem 1.1.3. Teorem 1.1.1.-in şərtləri daxilində,əgər verilmiş $\alpha \neq 0$ və β həqiqi ədədlər olub, $f_i \neq 0, i \geq 0$ şərtləri ödənilərsə, onda (1.1.1), (1.1.12) sərhəd məsələsinin (1.1.16) şəklində göstərilə bilən həlli mövcuddur.

Aşağıdakı kimi misala baxaq. Əgər N=4 olarsa,onda sərhəd məsələsi

$$y_i^{[II]} = f_i, \qquad i = 0, 1, 2. \qquad y_0 = \alpha_1,\ y_4 = \beta, \quad (1.1.17)$$

şəklində olur. Bu zaman (1.1.15)-dən y_1 üçün

$$y_1 = \left(\frac{\alpha^{3} \cdot \beta}{f_0^3 \cdot f_1^2 \cdot f_2} \right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (1.1.18)$$

ifadəsi alınmış olar. Qalan məchullar (1.1.16)-dan təyin olunurlar.

$$y_2 = \frac{f_0}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha^{3} \cdot \beta}{f_0^3 \cdot f_1^2 \cdot f_2} \right)^{\frac{2}{4}} = \frac{f_0}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha^{3} \cdot \beta}{f_0^3 \cdot f_1^2 \cdot f_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{f_1\sqrt{f_0 f_2}},$$

$$y_3 = \frac{f_0^2 \cdot f_1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{\alpha^{3} \cdot \beta}{f_0^3 \cdot f^2 \cdot f_2} \right)^{\frac{3}{4}} = \frac{f_0^2 \cdot f_1}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^{\frac{9}{4}} \cdot \beta^{\frac{3}{4}}}{f_0^{\frac{9}{4}} \cdot f_1^{\frac{3}{2}} \cdot f_2^{\frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{\alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \beta^{\frac{3}{4}}}{f_0^{\frac{1}{4}} \cdot f_1^{\frac{1}{2}} \cdot f_2^{\frac{3}{4}}},$$

$$y_4 = \frac{f_0^3 \cdot f_1^2 \cdot f_2}{\alpha^3} \cdot \left(\frac{\alpha^{3} \cdot \beta}{f_0^3 \cdot f_1^2 \cdot f_2} \right)^{\frac{4}{4}} = \beta$$

ifadəsi isə verilmiş (1.1.17) sərhəd şərtinin ikincisidir. Nəhayət (1.1.1),(1.1.12) sərhəd məsələsinin həlli üçün aldığımız (1.1.16) ifadəsində oxşar hədləri aşağıdakı kimi islah etməklə alarıq:

$$y_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-2} f_k^{\,i-1-k}}{\alpha^{i-1}} \cdot \frac{\alpha^{i-\frac{i}{N}} \cdot \beta^{\frac{i}{N}}}{\prod_{k=0}^{i-2}\left(f_k^{\,N-1-k}\right)^{\frac{i}{N}} \cdot \prod_{k=i-1}^{N-2} f_k^{\,i-\frac{i}{N}-\frac{ik}{N}}} = \frac{\alpha^{1-\frac{i}{N}} \cdot \beta^{\frac{i}{N}}}{\prod_{k=0}^{i-2} f_k^{\,i-\frac{i}{N}-\frac{ik}{N}-i+1+k} \cdot \prod_{k=i-1}^{N-2} f_k^{\,i-\frac{i}{N}-\frac{ik}{N}}}$$

$$= \frac{\alpha^{1-\frac{i}{N}} \cdot \beta^{\frac{i}{N}}}{\prod_{k=0}^{i-2} f_k^{\,1-\frac{i}{N}+k\cdot\left(1-\frac{i}{N}\right)} \cdot \prod_{k=i-1}^{N-2} f_k^{\,i\left(1-\frac{1}{N}-\frac{k}{N}\right)}} = \frac{\alpha^{1-\frac{i}{N}} \cdot \beta^{\frac{i}{N}}}{\prod_{k=0}^{i-2} f_k^{\,(1+k)\cdot\left(1-\frac{i}{N}\right)} \cdot \prod_{k=i-1}^{N-2} f_k^{\,i\left(1-\frac{k+1}{N}\right)}} \qquad (1.1.19)$$

Bununla da biz birinci fəslin birinci hissəsində qeyri-xətti bir fərqlərlə tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxmış oluruq.

Əvvəlcə verilmiş (ikinci tərtib) tənliyin iki ixtiyari sabitdən asılı olan ümumi həlli təyin edilmiş oldu.Yəni baxılan tənliyin ümumi həlli üçün analitik ifadə alındı,sonra isə Koşi və sərhəd məsələlərinə baxmaqla ümumi həllə daxil olan iki ixtiyari sabitləri Koşi məsələsində verilmiş başlanğıc şərtlərin köməyi ilə, sərhəd məsələsində isə verilmiş sərhəd şərtlərinin köməyi ilə təyin edilmiş olurlar.

Belə ki, Koşi məsələsinin həlli yeganə olduğu halda, sərhəd məsələsinin bir həqiqi həllini təyin etmiş oluruq.

Burada alınmış N dərəcəli (y_1-ə nəzərən) cəbri tənliyin hər həllinə sərhəd məsələsinin bir həlli uyğun gəlmiş olur.

1.2 . Üçüncü tərtib diskret multiplikati törəməli tənlik üçün koşi və sərhəd məsələlərinin həlli

Əvvəlki hissədə olduğu kimi burada da verilmiş tənliyin ixtiyari sabitlərdən asılı olan(bu sabitlərin sayı verilmiş tənliyin tərtibinə bərabərdir) ümumi həlli təyin edilir, sonra isə baxılan Koşi və ya sərhəd məsələsinin verilən başlanğıc və ya sərhəd şərtlərindən istifadə edərək ümumi həllə daxil olan ixtiyari sabitlər təyin olunurlar. Beləliklə qoyulmuş məsələnin həlli üçün analitik ifadə alınmış olur.

Beləliklə,aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$y_i^{[III]} = f_i, i \geq 0, \qquad (1.2.1)$$

burada $f_i \;\; i \geq 0$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, $y_i \;\; i \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Diskret multiplikativ törəmə üçün verilmiş (1.1.2) tərifindən istifadə edərək,(1.2.1) tənliyi aşağıdakı kimi açıq şəkilli ifadəsinə baxaq:

$$y_{i+3} = f_i \frac{y_{i+2}^3}{y_{i+1}^3} y_i, i \geq 0. \qquad (1.2.2)$$

Birinci hissədə olduğu kimi,burada da i-yə qiymətlər verməklə (1.2.2)-nin həllinin analitik ifadəsini almağa çalışaq.

$i = 0$ olarsa, (1.2.2)-dən alarıq:

$$y_3 = f_0 \frac{y_2^3}{y_1^3} y_0, \qquad (1.1.12)$$

$i = 1$ qiyməti üçün (1.2.2)-dən alırıq:

$$y_4 = f_1 \frac{y_3^3}{y_2^3} y_1,$$

və ya burada (1.2.3)-ni nəzərə almaqla:

$$y_4 = f_1 \frac{y_3^3}{y_2^3} y_1 = f_1 \cdot \frac{f_0^3 \cdot \frac{y_2^9}{y_1^9} y_0^3}{y_2^3} y_1 = f_1 f_0^3 \frac{y_2^6}{y_1^8} y_0^3. \qquad (1.2.4)$$

Əgər (1.2.2)-də i=2 götürülərsə,onda alarıq:

$$y_5 = f_2 \frac{y_4^3}{y_3^3} y_2,$$

burada (1.2.3) və (1.2.4)-i nəzərə almaqla:

$$y_5 = f_2 \frac{y_4^3}{y_3^3} y_2 = f_2 \cdot \frac{f_1^3 f_0^9 \cdot \frac{y_2^{18}}{y_1^{24}} y_0^9}{f_0^3 \frac{y_2^9}{y_1^9} y_0^3} \cdot y_2 = f_2 f_1^3 f_0^6 \frac{y_2^{10} y_0^6}{y_1^{15}}. \qquad (1.2.5)$$

Nəhayət (1.2.2)-nin həllinin analitik ifadəsində olan qanunauyğunluğu görmək üçün (1.2.2)-də i-yə üç qiyməti verək:

$$i = 3$$

$$y_6 = f_3 \frac{y_5^3}{y_4^3} y_3$$

Burada da (1.2.3), (1.2.4) və (1.2.5) ifadələrini yazmaqla,alarıq:

$$y_6 = f_3 \frac{y_5^3}{y_4^3} y_3 = f_3 \cdot \frac{f_2^3 f_1^9 f_0^{18} \cdot \frac{y_2^{30} y_0^{18}}{y_1^{45}}}{f_1^3 f_0^9 \frac{y_2^{18} y_0^9}{y_1^{24}}} \cdot f_0 \frac{y_2^3}{y_1^3} y_0 = f_3 f_2^3 f_1^6 f_0^{10} \frac{y_2^{15} y_0^{10}}{y_1^{24}}. \quad (1.2.6)$$

Beləliklə aldığımız (1.2.3)-(1.2.6) ifadələrində onların nə cür dəyişmə qanunauyğunluğunu görmək mümkün olmadığından biz (1.2.1) tənliyinə qayıdıb,onu başqa şəkildə həll etməyə çalışacağıq.

Verilmiş (1.2.1) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$(y_i^{[II]})^{[I]} = f_i, i \geq 0,$$

və ya diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə:

$$\frac{y_{i+1}^{[II]}}{y_i^{[II]}} = f_i, i \geq 0.$$

Burada *i*-yə qiymətlər verək:

$$\frac{y_1^{[II]}}{y_0^{[II]}} = f_0,$$

$$\frac{y_2^{[II]}}{y_1^{[II]}} = f_1,$$

$$\frac{y_3^{[II]}}{y_2^{[II]}} = f_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{i-1}^{[II]}}{y_{i-2}^{[II]}} = f_{i-2},$$

$$\frac{y_i^{[II]}}{y_{i-1}^{[II]}} = f_{i-1}.$$

Aldığımız ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla(oxşar hədləri ixtisar etdikdən sonra),alarıq:

$$\frac{y_i^{[II]}}{y_0^{[II]}} = \prod_{k=0}^{i-1} f_k,$$

və ya

$$y_i^{[II]} = y_0^{[II]} \prod_{k=0}^{i-1} f_k\,, i \geq 1. \qquad (1.2.7)$$

Burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$g_i = g_i\left(y_0^{[II]}, f_k\right) = y_0^{[II]} \prod_{k=0}^{i-1} f_k\,, i \geq 1, \qquad (1.2.8)$$

onda (1.2.7) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_i^{[II]} = g_i, i \geq 1. \qquad (1.2.9)$$

Beləliklə biz üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.1) tənliyini ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.9) tənliyinə gətirmiş oluruq.

İndi isə ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.9) tənliyinə bir daha diskret multiplikativ törəmənin (1.1.2) tərifini tətbiq etməklə alırıq:

$$\frac{y_{i+1}^{[I]}}{y_i^{[I]}} = g_i, i \geq 1,$$

burada *i*-yə qiymətlər verək:

$$\frac{y_2^{[I]}}{y_1^{[I]}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{[I]}}{y_2^{[I]}} = g_2,$$

$$\frac{y_4^{[I]}}{y_3^{[I]}} = g_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{i-1}^{[I]}}{y_{i-2}^{[I]}} = g_{i-2},$$

$$\frac{y_i^{[I]}}{y_{i-1}^{[I]}} = g_{i-1}.$$

Alınan ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla (müəyyən hədləri ixtisar etdikdən sonra) aşağıdakı tənliyi almış oluruq:

$$\frac{y_i^{[I]}}{y_1^{[I]}} = \prod_{s=1}^{i-1} g_s,$$

və ya

$$y_i^{[I]} = y_1^{[I]} \prod_{s=1}^{i-1} g_s \, , i \geq 2, \qquad (1.2.10)$$

Beləliklə üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.1) tənliyini birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.10) tənliyinə gətirmiş oluruq. Burada aşağıdakı kimi işarələmə aparsaq:

$$h_i = h_i\left(y_i^{[I]} g_s\right) = y_1^{[I]} \prod_{s=1}^{i-1} g_s \, , i \geq 2. \qquad (1.2.11)$$

Aldığımız birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.10) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_i^{[I]} = h_i, i \geq 2. \qquad (1.2.12)$$

Nəhayət aldığımız birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.12) tənliyinə yenə də (1.1.2) diskret multiplikativ törəmənin tərifini tətbiq etsək,alarıq:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = h_i, i \geq 2,$$

burada *i*-yə qiymətlər verməklə ,alarıq:

$$\frac{y_3}{y_2} = h_2,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = h_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{i-1}}{y_{i-2}} = h_{i-2},$$

$$\frac{y_i}{y_{i-1}} = h_{i-1}$$

Alınan bu ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla:

$$\frac{y_i}{y_2} = \prod_{m=2}^{i-1} h_m,$$

və yaxud

$$y_i = y_2 \prod_{m=2}^{i-1} h_m \, , i \geq 3. \qquad (1.2.13)$$

Beləliklə üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli (1.2.1) tənliyinin ümumi həlli üşün (1.2.13) ifadəsini almış oluruq,belə ki, h_i-lər (1.2.11) vasitəsi ilə g_i -lər isə (1.2.8) vasitəsi ilə f_k-lar vasitəsi ilə verilmiş olurlar.Bu ümumi həllə daxil olan $y_0^{[II]}, y_1^{[1]}$, və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 1.2.1. Əgər f_i , $i \geq 0$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq olarsa, onda (1.2.1) tənliyinin ümumi həlli (1.2.13) şəklində olmaqla, h_i-lər (1.2.11), g_i-lər isə (1.2.8) vasitəsi ilə verilmiş olurlar,bunlarda iştirak edən $y_0^{[II]}, y_1^{[1]} v\partial\ y_2$ ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (1.2.1) tənliyinə aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərini qoşaq:

$$y_k = \alpha_k, k = \overline{0,2}, \tag{1.2.14}$$

burada $\alpha_k, k = \overline{0,2}$,verilmiş həqiqi ədədlərdir. Onda (1.2.1),(1.2.14) Koşi məsələsinin həllini (1.2.1) tənliyinin ümumi həlli olan (1.2.13) ifadəsindən alacağıq. Əvvəlcə (1.2.8)-ə qayıdıb, $y_0^{[II]}$-nin

$$y_0^{[II]} = \frac{y_0 y_2}{y_1^2} = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1^2},$$

olduğunu nəzərə alsaq;

$g_i$üçün

$$g_i = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1^2} \prod_{k=0}^{i-1} f_k \, , i \geq 1, \tag{1.2.15}$$

özündə heç bir ixtiyarilik saxlamayan (1.2.15) ifadəsini almış oluruq. Sonra isə (1.2.11)-ə qayıdıb, $y_1^{[I]}$üçün

$$y_1^{[I]} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

ifadəsini qəbul etməklə, h_i üçün özündə heç bir ixtiyarilik saxlamayan

$$h_i = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \prod_{s=1}^{i-1} g_s \, , i \geq 2, \tag{1.2.16}$$

ifadəsini almış oluruq. Nəhayət (1.2.13) ifadəsinə qayıdıb, orada y_2 nin (1.2.14)-dəki qiymətini yazmaqla Koşi məsələsinin həlli üçün aşağıdakı ifadəni almış oluruq:

$$y_i = \alpha_2 \prod_{m=2}^{i-1} h_m \,, i \geq 3, \tag{1.2.17}$$

Beləliklə aldığımız nəticəni aşağıdakı hökm şəklində verə bilərik.

Teorem 1.2.2. Teorem 1.2.1-in şərtləri daxilində, əgər $\alpha_0, \alpha_1 \neq 0$ və α_2 verilmiş həqiqi sabitlərdisə, onda (1.2.1), (1.2.14) Koşi məsələsinin həlli (1.2.17) şəklindədir.belə ki, h_i-lər (1.2.16), g_i -lər isə (1.2.15) vasitəsi ilə verilmiş olurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə üçüncü tərtib (1.2.1) tənliyinə i-nin $\overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, alınan tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$y_0^{[II]} = \alpha, y_1^{[I]} = \beta, y_N = \gamma. \tag{1.2.18}$$

Onda birinci iki şərtləri nəzərə almaqla (1.2.8) və (1.2.11)dan alarıq:

$$g_i = \alpha \prod_{k=0}^{i-1} f_k \,, i \geq 1. \tag{1.2.19}$$

Belə ki aldığımız g_i, y_N və h_i $i \geq 2$, ifadələrində heç bir ixtiyarilik qalmır, yəni onlar birqiymətli təyin edilmiş olurlar. Sonra isə (1.2.18) sərhəd şərtlərinin üçüncüsünü ümumi həll olan (1.2.13) də nəzərə almaqla;y_2 üçün

$$\gamma = y_N = y_2 \prod_{m=2}^{N-1} h_m, \tag{1.2.20}$$

şəklində xətti cəbri tənlik almış oluruq. Bu (1.2.20) tənliyindən y_2-ni təyin edək:

$$y_2 = \frac{\gamma}{\prod_{m=2}^{N-1} h_m}, \tag{1.2.21}$$

Aldığımız (1.2.21)-i (1.2.13)-də yazmaqla qoyulmuş (1.2.1),(1.2.18) sərhəd məsələsinin həllini

$$y_i = \frac{\gamma}{\prod_{m=2}^{N-1} h_m} \prod_{m=2}^{i-1} h_m = \frac{\gamma}{\prod_{m=i}^{N-1} h_m}, i \geq 3, \tag{1.2.22}$$

şəkildə almış oluruq. Bununla da aşağıdakı hökm alınır.

Teorem 1.2.3. Teorem 1.2.1.-in şərtləri daxilində əgər (1.2.18) sərhəd şərtlərinin verilənləri α, β və γ həqiqi sabitlər olub, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ və (1.2.19) kimi təyin olunmuş $g_i \neq 0, i \geq 1; h_i \neq 0, i \geq 2;$ şərtləri ödənilərsə, onda (1.2.1),(1.2.18) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (1.2.22) analitik ifadəsi vasitəsi ilə verilə bilər.

İndi isə $0 \leq i \leq N-3$ qiymətləri üçün baxılan (1.2.1) tənliyinə aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri qoşsaq:

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta, y_N = \gamma, \tag{1.2.23}$$

Buradaα, β və γ verilmiş həqiqi ədədlərdir.

Ona görə üçüncü sərhəd şərtini (1.2.13) ümumi həllində yazmaqla,$y_2$üçün aşağıdakı kimi tənlik almış oluruq:

$$\gamma = y_N = y_2 \prod_{m=2}^{N-1} h_m, \qquad (1.2.24)$$

Burada h_i-lər $y_1^{[I]}$-indən asılı olan (1.2.11) vasitəsi ilə təyin olunurlar. Ona görə də (1.2.24)-ə (1.2.11) ifadələrini yazmaqla,alarıq:

$$\gamma = y_2 \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\frac{y_2}{y_1} \prod_{s=1}^{m-1} g_s \right), \qquad (1.2.25)$$

Aldığımız (1.2.25) ifadəsinə daxil olan g_s-lər isə $y_0^{[II]}$ – dən asılı olan (1.2.8) ifadəsi ilə təyin edilmiş olurlar. Odur ki (1.2.23) şərtlərini nəzərə almaqla (1.2.8)-i (1.2.25)-də yerinə yazsaq,alarıq:

$$\gamma = y_2^{N-1} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\beta^{-1} \prod_{s=1}^{m-1} \left(\frac{\alpha y_2}{\beta^2} \prod_{k=0}^{s-1} f_k \right) \right) =$$

$$=$$

$$= y_2^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\beta^{-1} \prod_{s=1}^{m-1} \left(\alpha \beta^{-2} \prod_{k=0}^{s-1} f_k \right) \right) =$$

$$= \frac{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} y_2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{\beta^{N(N-2)}} \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{m-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k \, ,$$

tənliyindən y_2 üçün alarıq:

$$y_2^{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{\gamma \beta^{N(N-2)}}{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \cdot \prod_{p=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{p-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k},$$

buradan da

$$y_2 = \sqrt[\frac{N(N-2)}{2}]{\frac{\gamma \beta^{N(N-2)}}{\alpha^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \cdot \prod_{p=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{p-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k}} = \left(\frac{\gamma \beta^{N(N-2)} \alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{p=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{p-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k} \right)^{\frac{2}{N(N-1)}} (1.2.26).$$

Onda (1.2.1), (1.2.23) sərhəd məsələsinin həlli (1.2.13)-dən aşağıdakı şəkildə alınmış olar:

$$y_j = \left(\frac{\gamma \beta^{N(N-2)} \alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{pi=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{p-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k} \right)^{\frac{2}{N(N-1)}} \cdot \prod_{m=2}^{j-1} h_m \, , j \geq 1. \qquad (1.2.27)$$

Burada h_m-lər (1.2.11)-dən (1.2.23) sərhəd şərtlərini və $y_2$üçün aldığımız (1.2.26) ifadələrini nəzərə almaqla aşağıdakı kimi təyin edilirlər:

$$h_m = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}\alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{p=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{p-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}\right)^{\frac{2}{N(N-1)}} \cdot \prod_{n=1}^{m-1} g_n \, m \geq 2, \qquad (1.2.28)$$

g_s-lər isə (1.2.23) sərhəd şərtlərini və $y_2$üçün aldığımız (1.2.24) ifadəsini nəzərə almaqla (1.2.8)-dən aşağıdakı kimi təyin edilirlər:

$$g_s = \frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\gamma\beta^{N(N-2)}\alpha^{-\frac{(N-1)(N-2)}{2}}}{\prod_{p=2}^{N-1}\prod_{s=1}^{p-1}\prod_{k=0}^{s-1} f_k}\right)^{\frac{2}{N(N-1)}} \cdot \prod_{k=0}^{s-1} f_k \, s \geq 1, \qquad (1.2.29)$$

Beləliklə alırıq:

Teorem 1.2.4. Teorem 1.2.1-in şərtləri daxilində, əgər (1.2.23) sərəhd şərtinin verilənləri α, β və γ həqiqi sabitlər olmaqla $f_k \neq 0$ şərti ödənilməklə (1.2.26)-(1.2.29)-lər təyin olunmuşlarsa, onda (1.2.1), (1.2.23) məsələsinin (1.2.27) şəklində verilə bilən həlli mövcuddur.

Qeyd 1.2.1.Sərhəd məsələsi üçün aldığımız həll yeganə deyildir.Beləki,y_2 üçün aldığımız (1.2.25) tənliyinin həlli yeganə olmayıb, $\frac{N(N-1)}{2}$ dərəcəli cəbri tənlikdən alınan bir həlldir. Cəbrin əsas teoremin görə bu cəbri tənliyin $\frac{N(N-1)}{2}$ dənə həlli mövcuddur.

1.3. İkinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həlli

Məlumdur ki, kəsilməz halda multiplikativ inteqral 1887-ci ildə Voltera tərəfindən verilmişdir [100], sonralar 1937-ci ildə Birkhoff tərəfindən daha ümumi şərtlər daxilində (geniş oblastlar üçün) təyin edilmişdir. [102]

Qantmaxerin "Matrislər nəzəriyyəsi" kitabında bu inteqral aşağıdakı şəkildə verilmişdir. (səh. 434, formula (50)):

$$\int_{t_0}^{\hat{t}}[E + P(t)dt] = \lim_{\Delta t_k \to 0}[E + P(E_n)\Delta t_n]\ldots[E + P(E_1)\Delta t_1].$$

multiplikativ törəmə isə həmin səhifədə

$$D_t X = \frac{dX}{dt}X^{-1},$$

şəkildə verilmişdir. Qeyd edirik ki,

$$D_t \text{ və } \int_{t_0}^{\hat{t}}$$

qarşılıqlı tərs əməllərdir.

İndi biz aşağıdakı kimi kəsilməz halda ikinci tərtib multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün məsələlərə baxaq:

$$D_t^2 y(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{1.3.1}$$

tərifdən istifadə etsək,

$$D_t y(t) = Z(t). \tag{1.3.2}$$

əvəzləməsindən sonra

$$D_t Z(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{1.3.3}$$

tənliyini almış olarıq.

Bu tənliyə isə

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = f(t), \quad t > 0, \tag{1.3.4}$$

şəklində yaza bilərik. Burada törəmə artıq kəsilməz additivdir. Onda (1.3.4)-ü inteqrallasaq:

$$ln\frac{Z(t)}{C_1} = \int_0^t f(\tau)\, d\tau,$$

və ya

$$Z(t) = C_1 e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}, \tag{1.3.5}$$

ifadələrini almış olarıq. Burada C_1 ixtiyari sabirdir.

İndi isə (1.3.2)-yə qayıtsaq, onu tərifə əsasən

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = Z(t) = C_1 e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}, \tag{1.3.6}$$

şəklinə salmış olarıq.

Aldığımız (1.3.6)-nın hər iki tərəfini additiv inteqrallasaq:

$$ln\frac{y(t)}{C_2} = C_1\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}d\xi,$$

yaxud da

$$y(t) = C_2 e^{C_1\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}d\xi}, \tag{1.3.7}$$

ifadəsini almış olarıq. Beləliklə ikinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəməli (1.3.1) tənliyinin ümumi həlli üçün iki ixtiyarı C_1, C_2 sabitlərindən asılı olan (1.3.7) ifadəsini almış oluruq.

İndi (1.3.1) tənliyi üçün Koşi məsələsinə baxaq:

$$y(0) = \alpha,\ D_t y(t)|_{t=0} = \beta, \tag{1.3.8}$$

Onda (1.3.2)-dən göründüyü kimi

$$Z(0) = \beta,$$

olduğundan, (1.3.5)-dən

$$Z(0) = C_1 = \beta,$$

olduğunu alarıq. Onda (1.3.7)-dən alınan

$$y(t) = C_2 e^{\beta\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}d\xi}, \tag{1.3.9}$$

ifadəsində $t = 0$ götürsək,

$$C_2 = \alpha$$

olduğunu alarıq. Bu ifadəni (1.3.9)-da nəzərə almaqla (1.3.1), (1.3.8) Koşi məsələsinin həlli üçün

$$y(t) = \alpha e^{\beta\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}d\xi}, \tag{1.3.10}$$

ifadəsini almış oluruq

$$D_t y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\alpha e^{\beta\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}d\xi}\cdot\beta e^{\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}}}{\alpha e^{\beta\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}d\xi}} = \beta e^{\int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau}},$$

buradan da

$$D_t y(t)|_{t=0} = \beta,$$

ikinci başlanğıc şərtin ödənildiyi görünür. Nəhayət

$$D_t\big(D_t y(t)\big) = \frac{\beta e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}}{\beta e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}}\cdot f(t) = f(t),$$

olduğundan (1.3.1) tənliyi ödənilir.

İndi isə (1.3.1) tənliyini $t \in (0, l)$ də baxıb aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri verək:

$$y(0) = \alpha, \quad y(l) = \beta, \tag{1.3.11}$$

Yenə də (1.3.1) tənliyinin (1.3.7) ümumi həllinə qayıdıb, orada olan ixtiyari C_1 və C_2 sabitlərini (1.3.11) sərhəd şərtlərindən təyin edək.

$$y(0) = C_2 = \alpha,$$

olduğu alınır. Onda (1.3.7) aşağıdakı şəklə düşər:

$$y(t) = \alpha e^{C_1 \int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau} d\xi}, \tag{1.3.12}$$

Bu ifadənin multiplikativ törəməsini təyin edək:

$$D_t y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\alpha e^{C_1 \int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau} d\xi} \cdot C_1 e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}}{\alpha e^{C_1 \int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau} d\xi}} = C_1 e^{\int_0^t f(\tau)d\tau},$$

buradan da

$$D_t y(t)|_{t=0} = C_1 = \beta,$$

olduğundan (1.3.12)-dən (1.3.1), (1.3.11) sərhəd məsələsinin həlli üçün

$$y(t) = \alpha e^{\beta \int_0^t e^{\int_0^\xi f(\tau)d\tau} d\xi}, \tag{1.3.13}$$

ifadəsi alınmış olar.

Teorem 1.3.1. İkinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəməli (1.3.1) tənliyi üçün (1.3.8) başlanğıc şərtləri daxilində Koşi məsələsinin həlli (1.3.10) şəklində (1.3.11) sərhəd şərtləri daxilində məsələnin həlli isə (1.3.13) şəklindədir. Burada f(t) kəsilməz funksiya, α və β isə verilmiş sabitlərdir.

Eyni qayda ilə üçüncü tərtib kəsilməz multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün də Koşi və sərhəd məsələsinə baxmaq olar.

II Fəsil

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB QARIŞIQ DİSKRET TÖRƏMƏLİ TƏNLİK ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

Burada iki müxtlif diskret törəməli differensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılacaqdır. Bu şəkildə tənliklər üçün məsələlərə biz baxmağa başlamışıq. Əvvəlcə fərqlərlə tənliklərdən alınan diskret additiv törəmə və inteqral da verilmişdir. Sonra isə kəsilməz halda multiplikativ törəmə və inteqral (onların sadə xassələri) verilməsinə baxmayaraq, bu cür tənliklər üçün məsələlərə axır vaxtlar baxılmağa başlanılmışdır. Diskret multiplikativ törəmə və diskret multiplikativ inteqralın təyini də Nihan Əliyevə məxsusdur [85],[95]. “Ədədlər çoxluğunun inkişaf mərhələləri” kitabçası meydana gəldikdən sonra yeni törəmə (kəsilməz halda) “poverativ törəmə” və “poverativ inteqral” anlayışları meydana gəldi. Belə ki,hər bir inteqral iki ardıcıl düz əməlin nəticəsi kimi,hər bir törəmə isə iki ardıcıl tərs əməlin nəticəsi kimi meydana gəlmiş oldu.

Belə ki additiv inteqral (limit əməliyyatını nəzərə almasaq) iki ardıcıl düz əməl olan “hasillərin cəmi kimi”, additiv törəmə isə (yenə də limiti nəzərə almasaq) iki ardıcıl tərs əməl olan “fərqlərin nisbəti kimi” təyin edilmiş olar. Multiplikativ inteqral (kəsilməz halda) iki ardıcıl düz əməl olan “qüvvətlərin hasili kimi”, multiplikativ törəmə isə iki ardıcıl tərs əməl olan “nisbətlərin kökü kimi” təyin edilmiş olurlar (burada da limitlər nəzərə alınmır). Nəhayət göründüyü kimi bu prosesi davam etdirmək olar, amma indi haqqında söhbət açacağımız əməllər üçün bildiyimiz yeddi cəbri əməl (toplama-çıxma,vurma-bölmə,qüvvətə yüksəltmə-kökalma və loqarifmləmə əməlləri) kifayət deyildirlər. Belə ki “povertiv inteqralı” vermək üçün yeni “dördüncü düz əməl “ və “poverativ törəməni” vermək üçün yeni tərs əməl vermək lazımdır. Diskret hala gəldikdə isə, diskret additiv inteqral üçün bir düz əməl “toplama” , diskret additiv törəmə üçün isə bir tərs əməl “çıxma” lazım gəlir.

Diskret multiplikativ inteqral üçün bir düz əməl “vurma” kifayət etdiyi halda diskret multiplikativ törəmə üçün də bir tərs əməl “bölmə” kifayət edir.

Nəhayət diskret poverativ inteqral üçün bir düz əməl “qüvvətə yüksəltmə” kifayət etdiyi halda, diskret poverativ törəməni vermək üçün bir tərs əməl “kökalma əməli kifayət edir.

Beləliklə nə diskret poverativ inteqralı nə də diskret poverativ törəməni vermək üçün yeni əməl lazım gəlmir. Yeddi cəbri əməl kifayət edir.

Qeyd edək ki, diskret additiv törəməni

$$y_n^{(I)} = y_{n+1} - y_n, \tag{2.1}$$

diskret additiv inteqralı

$$\int_0^n y_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k, \tag{2.2}$$

diskret multiplikativ törəməni

$$y_n^{[I]} = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \tag{2.3}$$

diskret multiplikativ inteqralı

$$\int_0^n y_k = \prod_{k=0}^{n-1} y_k, \tag{2.4}$$

diskret poverativ törəməni

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}}, \tag{2.5}$$

nəhayət diskret poverativ inteqral üçün isə

$$y_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}} = {}^{y_0}\!\left(\int_n^0 f_k\right) = {}^{y_0}\!\left(\mathrm{P}_{k=n-1}^{0} f_k\right) \tag{2.6}$$

ifadəsi mövcuddur. Bütün işarələmələr elmi rəhbərim Nihan Əliyevə məxsusdur.

2.1. Diskret additiv törəmənin ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərin həlli

Birinci hissədə ikinci tərtib diskret multiplikativ törəmənin additiv törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxmışdıq. Burada isə diskret additiv törəmənin ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılacaqdır. Əvvəlcə baxılan tənliyi diskret multiplikativ və diskret additiv törəmələrin təriflərindən istifadə etməklə, o tənliyi açıq şəkildə fərqlərlə tənliyə gətirib, onun ümumi həllini indeksə qiymətlər verməklə tapmağa çalışacağıq. Əgər bu qiymətlər verməklə həll üçün qanunauyğunluq görünərsə, onda onun riyazi induksiya üsulu ilə isbat etməyə səy göstərəcəyik.

Beləliklə, aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(y_i^{(I)}\right)^{[II]} = f_i, i \geq 0, \qquad (2.1.1)$$

burada $f_i, i \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq $y_{i,} i \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Yuxarıda verdiyimiz diskret törəmələrin tərifindən istifadə etsək, (2.1.1) tənliyi aşağıdakı kimi fərqlərlə tənliyə çevrilmiş olar.

$$y_{i+3} = y_{i+2} + f_i \cdot \frac{(y_{i+2} - y_{i+1})^2}{y_{i+1} - y_i}, i \geq 0. \qquad (2.1.2)$$

Bu tənliyi həll etmək üçün əvvəlcə i -yə bir neçə qiymət verib bu ardıcılığın nə cür qurulduğu qanunauyğunluğu tapmağa çalışaq. Əgər $i = 0$ olarsa, onda (2.1.2)-dən alarıq:

$$y_3 = y_2 + f_0 \cdot \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 - y_0}, \qquad (2.1.3)$$

i=1 olduqda

$$y_4 = y_3 + f_1 \cdot \frac{(y_3 - y_2)^2}{y_2 - y_1},$$

aldığımız bu ifadədə (2.1.3)-ü nəzərə almaqla bu ifadə aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_4 = y_2 + f_0 \cdot \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 - y_0} + f_1 \cdot \frac{f_0^2 \frac{(y_2 - y_1)^4}{(y_1 - y_0)^2}}{y_2 - y_1} =$$

$$= y_2 + f_0 \cdot \frac{(y_2-y_1)^2}{y_1-y_0} + f_i f_0^2 \cdot \frac{(y_2-y_1)^3}{(y_1-y_0)^2}, \qquad (2.1.4)$$

Yuxarıdakı (2.1.2) tənliyində *i*=2 üçün alarıq:

$$y_5 = y_4 + f_2 \cdot \frac{(y_4-y_3)^2}{y_3-y_2}.$$

Bu ifadədə (2.1.3) və (2.1.4) i nəzərə almaqla,onu aşağıdakı şəklə salmaq olar:

$$y_5 = y_2 + f_0 \cdot \frac{(y_2-y_1)^2}{y_1-y_0} + f_i f_0^2 \cdot \frac{(y_2-y_1)^3}{(y_1-y_0)^2} +$$

$$+f_i \frac{f_1^2 \cdot \frac{f_0^4 \cdot \frac{(y_2-y_1)^8}{(y_1-y_0)^4}}{(y_2-y_1)^2}}{f_0 \frac{(y_2-y_1)^2}{y_1-y_0}} = y_2 + f_0 \cdot \frac{(y_2-y_1)^2}{y_1-y_0} +$$

$$+f_i f_0^2 \cdot \frac{(y_2-y_1)^3}{(y_1-y_0)^2} + f_2 \cdot f_1^2 \cdot f_0^3 \cdot \frac{(y_2-y_1)^4}{(y_1-y_0)^3} =$$

$$= y_2 + \sum_{k=0}^{2} \left(\prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p \right) \cdot \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}}. \qquad (2.1.5)$$

Beləliklə (2.1.2) tənliyinin həlli üçün aşağıdakı qanunauyğunluğu almış oluruq:

$$y_{i+3} = y_2 + \sum_{k=0}^{i} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p, i \geq 0, \qquad (2.1.6)$$

İndi isə (2.1.6)-da olan qanunauyğunluğu riyazi induksiya üsulu ilə isbat edək:

Bunun üçün (2.1.3)-(2.1.5)-dən göründüyü kimi (2.1.6) ifadəsi *i*=0, *i*=1 və*i*=2 üçün ödənilir.

İndi isə (2.1.6)-un $i \leq s$ üçün doğruluğunu qəbul edib, bu ifadənin $i = s+1$ üçün doğruluğunu isbat edək. Bunun üçün (2.1.2)-də $i = s+1$ götürməklə alırıq:

$$y_{s+4} = y_{s+3} + f_{s+1} \frac{(y_{s+3}-y_{s+2})^2}{y_{s+2}-y_{s+1}} = y_2 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{s} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p +$$

$$+f_{s+1} \frac{\left[\sum_{k=0}^{s} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p \right]^2}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p - \sum_{k=0}^{s-2} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p} =$$

$$= y_2 + \sum_{k=0}^{s} \frac{(y_2 - y_1)^{k+2}}{(y_1 - y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p + f_{s+1} \frac{\left(\frac{(y_2-y_1)^{s+2}}{(y_1-y_0)^{s+1}} \cdot \prod_{p=1}^{s+1} f_{s+1-p}^p\right)^2}{\frac{(y_2-y_1)^{s+1}}{(y_1-y_0)^{s}} \cdot \prod_{p=1}^{s} f_{s-p}^p} =$$

$$= y_2 + \sum_{k=0}^{s} \frac{(y_2 - y_1)^{k+2}}{(y_1 - y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p +$$

$$+f_{s+1} \frac{\frac{(y_2-y_1)^{s+2}}{(y_1-y_0)^{s+1}} \cdot \prod_{p=1}^{s+1} f_{s+1-p}^p \cdot \frac{(y_2-y_1)^{s+2}}{(y_1-y_0)^{s+1}} \cdot \prod_{p=1}^{s+1} f_{s+1-p}^p}{\frac{(y_2-y_1)^{s+1}}{(y_1-y_0)^{s}} \cdot \prod_{p=1}^{s} f_{s-p}^p} =$$

$$= y_2 + \sum_{k=0}^{s} \frac{(y_2 - y_1)^{k+2}}{(y_1 - y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p +$$

$$+f_{s+1} \cdot \frac{(y_2 - y_1)^{s+2}}{(y_1 - y_0)^{s+1}} \cdot \prod_{p=1}^{s+1} f_{s+1-p}^p \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0} f_0 f_1 f_{s-1} f_s =$$

$$= y_2 + \sum_{k=0}^{s+1} \frac{(y_2-y_1)^{k+2}}{(y_1-y_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p \qquad (2.1.7)$$

Bununla da (2.1.6) ifadəsinin doğruluğu isbat edilmiş olar. Beləliklə alırıq:

Teorem 2.1.1. Əgər f_i $i \geq 0$, verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (2.1.1) tənliyinin ümumi həlli var və bu həll (2.1.6) şəklindədir,belə ki, y_0, y_1və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi. İndi (2.1.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərinə baxaq:

$$y_i = \alpha_i, i = \overline{0,2}, \qquad (2.1.8)$$

burada α_0, α_1 $və$ $\alpha_2$verilmiş həqiqi ədədlərdir.

Onda (2.1.8)-dən göründüyü kimi (2.1.1),(2.1.8) Koşi məsələsinin həlli (2.1.6)-dan aşağıdakı şəkildə alınmış olur.

$$y_{i+3} = \alpha_2 + \sum_{k=0}^{i} \frac{(\alpha_2-\alpha_1)^{k+2}}{(\alpha_1-\alpha_0)^{k+1}} \cdot \prod_{p=1}^{k+1} f_{k+1-p}^p, i \geq 0, \qquad (2.1.9)$$

beləliklə alırıq:

Teorem 2.1.2. Teorem 2.1.1-in şərtləri daxilində əgər α_0, α_1 $və$ α_2, verilmiş həqiqi ədədlər olub, $\alpha_0 \neq \alpha_1$olarsa, onda (2.1.1), (2.1.8) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.1.9) şəklindədir.

Nəticə 2.1.1. Burada üçüncü tərtib diskret törəməli qeyri-xətti fərqlərlə tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış və bu məsələlərin həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır. Baxılan tənliyin ümumi həllinin qurulması onun şəkli müəyyənləşdirildikdən sonra bu qanunauyğunluğu riyazi induksiya üsulu ilə əsaslandırılmışdır.

İndi isə aşağıdakı kimi sərhəd məsələsinə baxaq:

Sərhəd məsələsi:

Əgər (2.1.1) tənliyinə n-in $\overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxılmaqla, bu tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərini versək:

$$y_2 - y_1 = \alpha, y_1 - y_0 = \beta, y_N = \gamma, \tag{2.1.10}$$

burada α, βvə γ verilmiş həqiqi sabitlərdir. Onda üçüncü sərhəd şərtini (2.1.6)-da nəzərə almaqla:

$$\gamma = y_N = y_2 + \sum_{s=0}^{N-3} \frac{(y_2 - y_1)^{s+2}}{(y_1 - y_0)^{s+1}} \prod_{s=1}^{k+1} f_{k+1-p}^{s}.$$

Aldığımız bu ifadədə (2.1.10)-un əvvəlki iki şərtlərini yazsaq, y_2 üçün aşağıdakı kimi tənlik almış olarıq.

$$\gamma = y_2 + \sum_{s=0}^{N-3} \frac{\alpha^{s+2}}{\beta^{s+1}} \prod_{p=0}^{s} f_{s-p}^{p+1-k}, \tag{2.1.11}$$

Aldığımız (2.1.11) tənliyindən y_2 aşağıdakı kimin təyin olunur,

$$y_2 = \gamma - \sum_{s=0}^{N-3} \frac{\alpha^{s+2}}{\beta^{s+1}} \prod_{p=0}^{s} f_{s-p}^{p+1-k}. \tag{2.1.12}$$

Onda (2.1.1), (2.1.10) sərhəd məsələsinin həlli (2.1.10) və (2.1.12)-ni nəzərə almaqla (2.1.6)-dan aşağıdakı şəkildə alınmış olur.

$$y_{i+3} = \gamma - \sum_{s=0}^{N-3} \frac{\alpha^{s+2}}{\beta^{s+1}} \prod_{p=0}^{s} f_{s-p}^{p+1-k} + \sum_{s=0}^{i} \frac{\alpha^{s+2}}{\beta^{s+1}} \prod_{p=0}^{s+1} f_{s-p}^{p+1} =$$

$$= \gamma - \sum_{s=i+1}^{N-3} \frac{\alpha^{s+2}}{\beta^{s+1}} \prod_{p=0}^{s} f_{s-p}^{p+1}, i \geq 0. \tag{2.1.13}$$

Bununla da qoyulmuş (2.1.1),(2.1.10) sərhəd məsələsinin həlli (2.1.13) şəklində alınmış olur.Beləliklə alırıq:

Teorem 2.1.3. Teorem 2.1.1-in şərtləri daxilində,əgərα, β və γ verilmiş həqiqi sabitlər olmaqla β≠0 olarsa, onda (2.1.1), (2.1.10) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.1.13) şəklindədir.

İndi isə aşağıdakı kimi sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\left(y_i^{(I)}\right)^{[II]} = f_i, i = \overline{0, N-3,} \tag{2.1.14}$$

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta, y_N = \gamma, \tag{2.1.15}$$

burada f_i, $\overline{0, N-3}$ α, β və γ verilmiş həqiqi ədədlər, y_i isə axtarılanlardır.

Asanlıqla görünür ki, bu sərhəd məsələsinin həllini (2.1.14) tənliyi üçün aldığımız (2.1.6) ümumi həllindən almaq çətin məsələdir. Belə ki, (2.1.14) və ya (2.1.1) tənliyinin ümumi həlli olan (2.1.6)-dan axırıncı sərhəd şərtini nəzərə aldıqdan sonra y_2 üçün alınan tənliyin həlli çətinlik törədir.

Burada y_2-yə nəzərən N –1 dərəcəli (əmsalları mürəkkəb olan) cəbri tənlik alınmış olar.

İndi biz (2.1.14) tənliyinin başqa şəkildə ümumi həllini quraq

Bunun üçün diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə alarıq:

$$\frac{\left(y_{i+1}^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_i^{(I)}\right)^{[I]}} = f_i, i \geq 0, \tag{2.1.16}$$

şəklə salaq. Burada i-yə qiymətlər verək:

i=0 olduqda,

$$\frac{\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}} = f_0,$$

i=1 olduqda,

$$\frac{\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]}} = f_1,$$

i=2 olduqda,

$$\frac{\left(y_3^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]}} = f_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\left(y_{n-1}^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_{n-2}^{(I)}\right)^{[I]}} = f_{n-2},$$

$$\frac{\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_{n-1}^{(I)}\right)^{[I]}} = f_{n-1}.$$

Alınan ifadələri tərəf-tərəfə vursaq, müəyyən hədlərin ixtisarından sonra alarıq:

$$\frac{\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}} = \prod_{k=0}^{n-1} f_k,$$

və ya

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = \left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} \prod_{k=0}^{n-1} f_k\,, n \geq 1. \qquad (2.1.17)$$

Burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul etsək:

$$g_n = g_n\left(\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}, f_k\right) = \left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} \prod_{k=0}^{n-1} f_k\,, n \geq 1, \qquad (2.1.18)$$

onda (2.1.17) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = g_n, n \geq 1, \qquad (2.1.19)$$

Bununla da verilmiş üçüncü tərtib (2.1.14) tənliyi,ikinci tərtib (2.1.19) tənliyinə gətirilmiş oldu.

Aldığımız (2.1.19) tənliyinə bir daha diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək:

$$\frac{y_{n+1}^{(I)}}{y_n^{(I)}} = g_n, n \geq 1, \qquad (2.1.20)$$

tənliyini almış oluruq ki, burada da n-ə qiymətlər verməklə,alarıq:

$$\frac{y_2^{(I)}}{y_1^{(I)}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{(I)}}{y_2^{(I)}} = g_2,$$

$$\frac{y_4^{(I)}}{y_3^{(I)}} = g_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{n-1}^{(I)}}{y_{n-2}^{(I)}} = g_{n-2},$$

$$\frac{y_n^{(I)}}{y_{n-1}^{(I)}} = g_{n-1},$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə vursaq,

$$\frac{y_n^{(I)}}{y_1^{(I)}} = \prod_{s=1}^{n-1} g_s,$$

və yaxud, buradan da

$$y_n^{(I)} = y_1^{(I)} \prod_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2, \qquad (2.1.21)$$

birinci tərtib tənliyini almış oluruq. Aşağıdakı kimi işarələmə aparsaq:

$$h_n = h_n\left(y_1^{(I)} g_s\right) = y_1^{(I)} \prod_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2, \qquad (2.1.22)$$

onda (2.1.21) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{(I)} = h_n, n \geq 2. \qquad (2.1.23)$$

Beləliklə verilmiş üç tərtibli (2.1.14) tənliyi birinci tərtib diskret additiv törəməli (2.1.23) tənliyinə gətirilmiş oldu.

Bu tənliyi diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə aşağıdakı kimi fərqlərlə tənliyə gətirmək olur:

$$y_{n+1} - y_n = h_n, n \geq 2,$$

Burada *n*-ə qiymətlər versək:

$$y_3 - y_2 = h_2,$$

$$y_4 - y_3 = h_3,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} = h_{n-2},$$

$$y_n - y_{n-1} = h_{n-1},$$

alınan bu ifadələri tərəf-tərəfə cəmləsək, alarıq:

$$y_n = y_2 + \sum_{m=2}^{n-1} h_m\,, n \geq 3. \qquad (2.1.24)$$

Beləliklə, (2.1.14) tənliyinin ümumi həllini (2.1.24) şəklində almış oluruq. Belə ki, h_i-lər (2.1.22), g_i-lər isə (2.1.18) şəklindədirlər.

Bunlarda iştirak edən $\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}$, $y_1^{(1)}$ və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

İndi (2.1.15) sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla ümumi həllə daxil olan bu üç sabitləri təyin etməyə çalışaq.Axırıncı sərhəd şərtini (2.1.24) də nəzərə almaqla:

$$\gamma = y_N = y_2 + \sum_{m=2}^{N-1} h_m,$$

ifadəsində h_m -in (2.1.22)-dəki ifadələrini yazsaq, alarıq:

$$\gamma = y_2 + \prod_{m=2}^{N-1} y_1^{(I)} \prod_{s=1}^{m-1} g_s.$$

Nəhayət burada

$$\gamma = y_2 + \sum_{m=2}^{N-1} (y_2 - y_1) \prod_{s=1}^{m-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0} \prod_{k=0}^{s-1} f_k \right) =$$

$$= y_2 + \sum_{m=2}^{N-1} (y_2 - y_1) \frac{(y_2 - y_1)^{m-1}}{(y_1 - y_0)^{m-1}} \prod_{s=1}^{m-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k$$

$$= y_2 + \sum_{m=2}^{N-1} \frac{(y_2 - y_1)^m}{(y_1 - y_0)^{m-1}} \prod_{s=1}^{m-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k$$

Burada birinci iki sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq, y_2-yə nəzərən

$$\gamma = y_2 + \sum_{m=2}^{N-1} \frac{(y_2 - \beta)^m}{(\beta - \alpha)^{m-1}} \prod_{s=1}^{m-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k, \qquad (2.1.25)$$

tənliyini almış olarıq.

Aldığımız tənlikdə:

$$y_2 - \beta = t, \qquad (2.1.26)$$

əvəzləməsi aparsaq, y_2-yə nəzərən tənlik olan (2.1.25) t-yə nəzərən aşağıdakı tənliyə çevrilər:

$$\gamma = t + \beta + \sum_{m=2}^{N-1} a_m t^m, \tag{2.1.27}$$

burada

$$a_m = \frac{1}{(\beta-\alpha)^{m-1}} \prod_{s=1}^{m-1} \prod_{k=0}^{s-1} f_k \, , m = \overline{2, N-1}, \tag{2.1.28}$$

məlum sabitlərdir.

Beləliklə t-yə nəzərən N –1 dərəcəli (2.1.27) cəbri tənliyini almış oluruq. Cəbrin əsas teoreminə görə (2.1.27) tənliyinin N –1 kökü var. Onları $t_e$ilə işarə etsək, $e = \overline{1, N-1}$, onda (2.1.26)-dan N –1 dənə y_2 almış olarıq.

Bununla y_0, y_1və y_2 təyin edildikdən sonra (2.1.18)-dən g_i

$$g_i = \frac{(y_2-\beta)^m}{(\beta-\alpha)} \prod_{k=0}^{i-1} f_k \, , i \geq 1, \tag{2.1.29}$$

h_i-lər isə (2.1.22)-dən

$$h_i = y_2 - \beta \prod_{s=1}^{i-1} g_s \, , i \geq 2, \tag{2.1.30}$$

şəkildə alınmış olurlar. Sərhəd məsələsinin həlli isə (2.1.24)-dən alınır.

Teorem 2.1.4. Teorem 2.1.1.-in şərtləri daxilində,əgər α, β və γ verilmiş həqiqi sabitlər olmaqla α≠β olarsa, onda (2.1.14),(2.1.15) məsələsinin (2.1.24) şəklində həlli mövcuddur, belə ki, h_i-lər (2.1.30), g_i-lər isə (2.1.29) kimi təyin olunurlar, y_2 isə (2.1.26)-dan (2.1.27)-nin həlli olan t vasitəsi ilə tapılmış olur.

Qeyd 2.1.1. Bu sərhəd məsələsinin həlli də yeganə deyildir.

2.2. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəmənin diskret additiv törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərin həlli

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(y_n^{[II]}\right)^{(I)} = f_n, n \geq 0, \tag{2.2.1}$$

burada $f_n, n \geq 0$, verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, $y_n, n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Əgər yuxarıda göstərdiyimiz diskret additiv və diskret multiplikativ törəmələrin tərifindən istifadə etsək, (2.2.1) tənliyi aşağıdakı kimi açıq şəkildə yazıla bilər:

$$y_{n+3} = f_n \cdot \frac{y_{n+2}^2}{y_{n+1}} + y_n \frac{y_{n+2}^3}{y_{n+1}^3}, n \geq 0,$$

Bu tənlikdən ardıcıl olaraq y_3-dən başlayaraq bütün y_n-ləri y_0, y_1 və $y_2$vasitəsi ilə (f_n-lərdən də asılılıq mövcuddur) təyin etmək olar. Ancaq y_n üçün analitik ifadə vermək mümkün deyil (çox çətin məsələdir).Ona görə də (2.2.1) tənliyinə qayıdıb, diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə alırıq:

$$y_{n+1}^{[II]} - y_n^{[II]} = f_n, n \geq 0, \tag{2.2.2}$$

burada n-yə qiymətlər verək:

$$y_1^{[II]} - y_0^{[II]} = f_0,$$
$$y_2^{[II]} - y_1^{[II]} = f_1,$$
$$\vdots$$
$$y_n^{[II]} - y_{n-1}^{[II]} = f_{n-1}.$$

Aldığımız ifadələri tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$y_n^{[II]} - y_0^{[II]} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k,$$

və ya

$$y_n^{[II]} = y_0^{[II]} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\,, n \geq 1, \tag{2.2.3}$$

burada aşağıdakı işarələməni qəbul etsək:

$$g_n = g_n\left(y_0^{[II]}, f_k\right) = y_0^{[II]} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\,, n \geq 1, \tag{2.2.4}$$

onda (2.2.3) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{[II]} = g_n, n \geq 1. \tag{2.2.5}$$

Beləliklə üçüncü tərtib (2.2.1) tənliyini ikinci tərtib (2.2.5) tənliyinə gətirmiş oluruq.

Bu isə birinci fəsildə baxdığımız (1.1.1) tənliyidir. Bu (1.1.1) tənliyi üçün aldığımız nəticələrdən istifadə etməklə (2.2.1) tənliyinin ümumi həllini vermək olar. Ancaq biz burada (2.2.5) tənliyini ayrıca həll edəcəyik.

Diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (2.2.5)-dən alarıq:

$$\frac{y_{n+1}^{[I]}}{y_n^{[I]}} = g_n, n \geq 1, \qquad (2.2.6)$$

burada da *n*-ə qiymətlər verək:

$$\frac{y_2^{[I]}}{y_1^{[I]}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{[I]}}{y_2^{[I]}} = g_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{n-1}^{[I]}}{y_{n-2}^{[I]}} = g_{n-2},$$

$$\frac{y_n^{[I]}}{y_{n-1}^{[I]}} = g_{n-1}.$$

Aldığımız ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla:

$$\frac{y_n^{[I]}}{y_1^{[I]}} = \prod_{s=1}^{n-1} g_s,$$

ifadəsini,buradan da:

$$y_n^{[I]} = y_1^{[I]} \prod\nolimits_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2, \qquad (2.2.7)$$

tənliyini almış olarıq.

Burada

$$h_n = h_n\left(y_1^{[I]} g_s\right) = y_1^{[I]} \prod\nolimits_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2, \qquad (2.2.8)$$

işarələnməsini qəbul etsək, (2.2.7) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{[I]} = h_n, n \geq 2. \qquad (2.2.9)$$

Beləliklə verilmiş üçüncü tərtib (2.2.1) tənliyi, birinci tərtib (2.2.9) tənliyinə gətirilmiş oldu.

Aldığımız (2.2.9) tənliyində bir daha diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = h_n, n \geq 2,$$

İfadəsini almış oluruq. Burada da *n*-ə qiymətlər verməklə aldığımız

$$\frac{y_3}{y_2} = h_2,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = h_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} = h_{n-2},$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = h_{n-1},$$

alınan bu ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla

$$\frac{y_n}{y_2} = \prod_{m=2}^{n-1} h_m,$$

və yaxud (2.2.1) tənliyinin ümumi həlli üçün

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{m=2}^{n-1} h_m \, , n \geq 3, \qquad (2.2.10)$$

ifadəsini almış oluruq.

Bununla da aşağıdakı hökm alınmış olur.

Teorem 2.2.1. Əgər $f_n n \geq 0$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (2.2.1) tənliyinin ümumi həlli var və bu həll (2.2.10) şəklindədir, belə ki, h_n-lər (2.2.8), g_n-lər isə (2.2.4) şəklindədirlər, $y_0^{[II]}$, $y_1^{[I]}$ və $y_2$ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: İndi (2.2.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərinə baxaq:

$$y_k = \alpha_k, k = \overline{0,2}, \qquad (2.2.11)$$

burada α_0, α_1və α_2-lər verilmiş həqiqi ədədlərdir. Verilmiş (2.2.11) şərtlərinə əsasən,

$$y_1^{[II]} = \frac{y_0 y_2}{y_1^2} = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1^2}, y_1^{[I]} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \qquad (2.2.12)$$

olduğundan (2.2.4) ifadəsindən g_n-lər üçün alarıq:

$$g_n = \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \, , n \geq 1, \qquad (2.2.13)$$

belə ki, g_n-lər üçün aldığımız (2.2.13)-də artıq heç bir ixtiyarilik qalmır.

Eyni qayda ilə (2.2.11)-yə əsasən

$$y_1^{[I]} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \qquad (2.2.14)$$

olduğundan, (2.2.8)-dən h_n-lər üçün alarıq:

$$h_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \prod_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2, \tag{2.2.15}$$

ifadəsində də heç bir ixtiyarilik qalmadı.

Beləliklə verilmiş (2.2.11) başlanğıc şərtlərinin köməyi ilə g_n və h_n-lər birqiymətli təyin edilmiş olurlar. Ona görə də (2.2.1), (2.2.11) Koşi məsələsinin həlli (2.2.10)-dan aşağıdakı şəkildə təyin edilmiş olur:

$$y_n = \alpha_2 \cdot \prod_{m=2}^{n-1} h_m\,, n \geq 3, \tag{2.2.16}$$

bununla da aşağıdakı hökmü isbat etmiş oluruq:

Teorem 2.2.2. Teorem 2.2.1.-in şərtləri daxilində, əgər verilmiş α_k, $k = \overline{0,2}$ həqiqi sabitlərdirsə, onda (2.2.1), (2.2.11) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.2.16) şəklindədir, belə ki, h_n-lər (2.2.15), g_n-lər isə (2.2.13)-dan (2.2.11)-nin köməyi ilə təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (2.2.1) tənliyinə n-in $\overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, alınan tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$y_0^{[II]} = \alpha, y_1^{[I]} = \beta, y_N = \gamma. \tag{2.2.17}$$

Onda, verilmiş (2.2.17) sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla, (2.2.4) və (2.2.8) ifadələrindən g_n və h_n-lər üçün alarıq:

$$g_n = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\,, n \geq 1, \tag{2.2.18}$$

$$h_n = \beta \cdot \prod_{s=1}^{n-1} g_s\,, n \geq 2. \tag{2.2.19}$$

İndi (2.2.17) sərhəd şərtlərinin üçüncüsünü (2.2.10)-da nəzərə almaqla,y_2 üçün

$$\gamma = y_N = y_2 \prod_{m=2}^{N-1} h_m, \tag{2.2.20}$$

şəklində tənlik almış oluruq. Bu tənlikdən

$$y_2 = \frac{\gamma}{\prod_{m=2}^{N-1} h_m}, \tag{2.2.21}$$

olduğunu almış oluruq.

Onda sərhəd məsələsinin həlli (2.2.17)-in köməyi ilə (2.2.16) ümumi həllindən alınır.

$$y_n = \frac{\gamma}{\prod_{m=2}^{N-1} h_m} \cdot \prod_{m=2}^{n-1} h_m = \frac{\gamma}{\prod_{m=n}^{N-1} h_m}. \tag{2.2.22}$$

Beləliklə alırıq:

Teorem 2.2.3. Teorem 2.2.1.-in şərtləri daxilində, əgər α, β və γ verilmiş həqiqi sabitlərdisə, onda $h_m \neq 0$ şərtləri daxilində (2.2.1), (2.2.17) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.2.22) şəklindədir.belə ki, h_n -lər (2.2.19), g_n-lər isə (2.2.18) vasitəsi ilə təyin olunurlar.

Əgər (2.2.1) tənliyi üçün sərhəd şərtlərini

$$y_0^{[II]} = \alpha, y_1 = \beta, y_N = \gamma, \tag{2.2.23}$$

şəkildə verildiyini qəbul etsək, onda (2.2.4)-dən g_n-lər üçün

$$g_n = \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \,, n \geq 1, \tag{2.2.24}$$

ifadəsini almış oluruq ki, burada heç bir ixtiyarilik qalmır. İndi isə (2.2.23) sərhəd şərtlərindən axırıncısını (2.2.10)-da nəzərə alsaq, aşağıdakı tənliyi almış olarıq:

$$\gamma = y_N = y_2 \prod_{m=2}^{N-1} h_m.$$

Burada h_n -lərin (2.2.8) ifadələrini yerinə yazsaq y_2 üçün

$$\gamma = y_2 \cdot \prod_{m=2}^{N-1} \left(\frac{y_2}{\beta} \prod_{s=1}^{m-1} g_s \right) = \frac{y_2^{N-1}}{\beta^{N-2}} \prod_{m=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{m-1} g_s, \tag{2.2.25}$$

tənliyini almış oluruq. Bu tənlikdən y_2 üçün bir qiymət (həqiqi) almış oluruq:

$$y_2^{N-1} = \frac{\gamma \beta^{N-2}}{\prod_{m=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{m-1} g_s},$$

və yaxud:

$$y_2 = \sqrt[N-1]{\frac{\gamma \beta^{N-2}}{\prod_{m=2}^{N-1} \prod_{s=1}^{m-1} f_k}}. \tag{2.2.26}$$

Qeyd 2.2.1. Aldığımız (2.2.25) tənliyi y_2-yə nəzərən (N–1) dərəcəli cəbri tənlik olduğundan, cəbrin əsas teoreminə görə bu tənliyin kompleks ədədlər meydanında N–1 kökü mövcuddur. Biz bu köklərdən yalnız biri ilə kifayətlənmişik. Ona görə də baxılan sərhəd məsələsinin həlli yeganə deyildir.

İndi isə h_m-in (2.2.8)-dəki qiymətlərini (2.2.10)-da yazsaq,alarıq:

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{m=2}^{n-1}\left(\frac{y_2}{\beta}\prod_{s=1}^{m-1} g_s\right) = \frac{y_2^{n-1}}{\beta^{n-2}}\prod_{m=2}^{n-1}\prod_{s=1}^{m-1} g_s\,, n \geq 3.$$

Burada (2.2.26)-ni yazmaqla (2.2.1),(2.2.23) sərhəd məsələsinin həlli üçün

$$y_n = \frac{\sqrt[N-1]{(\gamma\beta^{N-2})^{n-1}}}{\beta^{n-2}} \cdot \frac{\prod_{m=2}^{n-1}\prod_{s=1}^{m-1} g_s}{\sqrt[N-1]{\left(\prod_{m=2}^{n-1}\prod_{s=1}^{m-1} g_s\right)^{n-1}}}, n \geq 3, \qquad (2.2.27)$$

ifadəsini almış oluruq. Bununla da belə bir hökm alınmış olur.

Teorem 2.2.4. Teorem 2.2.1.-in şərtləri daxilində,əgər (2.2.23) sərhəd şərtlərində verilmiş α, β və γ həqiqi sabitlər olmaqla $\beta \neq 0$və $g_s \neq 0$ olarsa, onda (2.2.1), (2.2.23) sərhəd məsələsinin (2.2.27) şəklində verilə bilən həlli mövcuddur, belə ki, g_s-lər (2.2.24) vasitəsi ilə birqiymətli təyin edilmiş olurlar.

2.3. İkinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəmənin kəsilməz additiv törəməsindən alınan üçüncü tərtib diferensial tənlik üçün məsələlərin həlli

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq

$$\left(D_t^2 y(t)\right)' = f(t), \quad t > 0 \qquad (2.3.1)$$

burada *f(t)* verilmiş kəsilməz funksiya, D_t – kəsilməz multiplikativ törəmə, ştrix isə kəsilməz additiv törəmədir.

Bu tənliyi (0, *t*)-də additiv inteqrallasaq:

$$D_t^2 y(t) = C_0 + \int_0^t f(\tau)\, d\tau, \qquad (2.3.2)$$

ifadəsini almış olarıq. Burada C_0 ixtiyari sabitdir.

İndi isə (1.3.1) tənliyinin (1.3.7) ümumi həllindən istifadə etməklə (2.3.2) tənliyinin ümumi həlli üçün alarıq:

$$y(t) = C_2 e^{C_1 \int_0^t e^{\int_0^\xi \left[C_0 + \int_0^\tau f(\eta) d\eta\right] d\tau} d\xi}, \qquad (2.3.3)$$

ifadəsini almış oluruq. Burada C_0, C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərdir. Yuxarıdakı (2.3.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$y(0) = \alpha_0, \quad D_t y(t)|_{t=0} = \alpha_1, \quad D_t^2 y(t)|_{t=0} = \alpha_2, \qquad (2.3.4)$$

Ümumi (2.3.3) həllinə daxil olan ixtiyari sabitləri verilmiş (2.3.4) başlanğıc şərtlərindən təyin edək. Bunun üçün aşağıdakı törəmələri hesablayaq:

$$D_t y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{C_2 e^{C_1 \int_0^t e^{\int_0^{\xi}\left[C_0+\int_0^{\tau} f(\eta)d\eta\right]d\tau} d\xi} \cdot C_1 e^{\int_0^t\left[C_0+\int_0^{\tau} f(\eta)d\eta\right]d\tau}}{C_2 e^{C_1 \int_0^t e^{\int_0^{\xi}\left[C_0+\int_0^{\tau} f(\eta)d\eta\right]d\tau}}}$$

$$= C_1 e^{\int_0^t\left[C_0+\int_0^{\tau} f(\eta)d\eta\right]d\tau},$$

$$D_t^2 y(t) = D_t\big(D_t y(t)\big) \frac{\big(D_t y(t)\big)'}{D_t y(t)} = \frac{C_1 e^{\int_0^t\left[C_0+\int_0^{\tau} f(\eta)d\eta\right]d\tau}\left[C_0+\int_0^t f(\tau)d\tau\right]}{C_1 e^{\int_0^t\left[C_0+\int_0^{\tau} f(\eta)d\eta\right]d\tau}}$$

$$= C_0 + \int_0^t f(\tau)\,d\tau,$$

bu isə (2.3.2) ifadəsidir. Verilmiş (2.3.4) şərtlərini nəzərə alsaq:

$$D_t^2 y(t)|_{t=0} = C_0 = a_2,$$
$$D_t y(t)|_{t=0} = C_1 = \alpha_1,$$
$$y(0) = C_2 = \alpha_0,$$

ifadələrini nəzərə almaqla (2.3.3)-dən (2.3.1), (2.3.4) Koşi məsələsinin həlli üçün alarıq:

$$y(t) = \alpha_0 e^{\alpha_1 \int_0^t e^{\int_0^{\xi}\left[\alpha_2+\int_0^{\eta} f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi}. \qquad (2.3.5)$$

İndi isə (2.3.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələsinə baxaq: $t \in (0, l)$,

$$D_t^2 y(t)|_{t=0} = \alpha, \quad D_t y(t)|_{t=0} = \beta, \quad y(l) = \gamma, \qquad (2.3.6)$$

burada α, β və γ verilmiş sabitlərdir.

Verilmiş (2.3.1) tənliyinə $t \in (0, l)$ də baxmaqla bu tənliyin ümumi həlli üçün aldığımız (2.3.3) ifadəsindəki ixtiyari sabitləri verilmiş (2.3.4) sərhəd şərtlərinin köməyi ilə təyin edək.

$$D_t^2 y(t)|_{t=0} = C_0 = \alpha,$$
$$D_t y(t)|_{t=0} = C_1 = \beta,$$

olduğundan (2.3.3)-dən alarıq:

$$y(t) = C_2 e^{\beta \int_0^t e^{\int_0^{\xi}\left[\alpha+\int_0^{\eta} f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi}. \qquad (2.3.7)$$

Nəhayət (2.3.7) də olan C_2 sabitini (2.3.6) şərtlərinin üçüncüsündən istifadə etməklə, tapmalıyıq:

$$y(l) = C_2 e^{\beta \int_0^l e^{\int_0^\xi \left[\alpha + \int_0^\eta f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi} = \gamma,$$

buradan da

$$C_2 = \gamma e^{-\beta \int_0^\ell e^{\int_0^\xi \left[\alpha + \int_0^\eta f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi}$$

olduğu alınır. Ona görə də (2.3.1), (2.3.6) sərhəd məsələsinin həlli üçün alarıq:

$$y(t) = \gamma e^{-\beta \int_0^\ell e^{\int_0^\xi \left[\alpha + \int_0^\eta f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi} \cdot e^{\beta \int_0^t e^{\int_0^\xi \left[\alpha + \int_0^\eta f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi} =$$

$$= \gamma e^{-\beta \int_t^\ell e^{\int_0^\xi \left[\alpha + \int_0^\eta f(\tau)d\tau\right]d\eta} d\xi}. \qquad (2.3.8)$$

Teorem 2.3.1. Verilmiş üçüncü tərtib kəsilməz törəməli (2.3.1) tənliyi üçün $t > 0$ olduqda (2.3.4) başlanğıc şərtləri daxilində Koşi məsələsinin həlli (2.3.5) şəklindədir, belə ki, α_0, α_1 və α_2 verilmiş sabitlər, $f(t)$ isə kəsilməz funksiyadır, $t \in (0, l)$ olduqda (2.3.1) tənliyi üçün (2.3.6) sərhəd şərtləri daxilində məsələnin həlli isə (2.3.8) şəklindədir, belə ki α, β və γ verilmiş sabitlər $f(t)$ isə kəsilməz funksiyadır.

Eyni qayda ilə kəsilməz additiv törəmənin ikinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxmaq olar.

III Fəsil

DİSKRET İKİ ÖLÇÜLÜ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

Əvvəlki iki fəsildə diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli araşdırılmışdır.

İndi isə iki ölçülü diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə baxılacaqdır.

Başqa sözlə desək, bu fəsildə diskret xüsusi törəməli tənliklər üçün məsələlərə baxılacaqdır.

Burada da əvvəlki işlərdə olduğu kimi, əvvəlcə verilmiş tənliyin ümumi həlli təyin ediləcəkdir. Əvvəlki işlərdə tənliklər üçün tapılan ümumi həllərə sonlu sayda sabitlər daxil olduqları halda bu fəsildə baxılan tənliklərin ümumi həllərinə ya sonsuz sayda və yaxud kafi qədər çox ixtiyari sabitlər daxil olacaqdır.

Həmin ixtiyari sabitlər verilmiş başlanğıc və ya sərhəd şərtlətinin köməyi ilə təyin edilməli olurlar.

Əgər verilən şərtlərin köməyi ilə həmin sabitlər təyin edilə bilmirsə, onda ya baxılan məsələnin sonsuz sayda həlli var, yaxud da məsələnin həlli yoxdur.

3.1. İkidəyişənli ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması

Burada aşağıdakı kimi tənliyə baxılır:

$$D_2^{[I]} D_1^{[I]} u_{ij} = f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0, \qquad (3.1.1)$$

burada $f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$ olduqda, verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, $u_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

$$D_1^{[I]}u_{ij} = \frac{u_{i+1j}}{u_{ij}},$$

$$D_2^{[I]}u_{ij} = \frac{u_{ij+1}}{u_{ij}},$$

və yaxud

$$D_2^{[I]}D_1^{[I]}u_{ij} = \frac{\frac{u_{i+1,j+1}}{u_{ij+1}}}{\frac{u_{i+1j}}{u_{ij}}} = \frac{u_{ij} \cdot u_{i+1,j+1}}{u_{ij+1} \cdot u_{i+1j}},$$

ona görə də (3.1.1) tənliyinin açıq şəkildə yazılışı:

$$u_{i+1,j+1} = \frac{u_{i+1j} \cdot u_{ij+1}}{u_{ij}} f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0. \qquad (3.1.2)$$

İndi qeyr-xətti fərqlərlə (3.1.2) tənliyini həll etməyə çalışaq.

Əvvəlcə $j = 0$ olduğunu qəbul edək. Onda alarıq:

$$u_{i+11} = \frac{u_{i+10} \cdot u_{i1}}{u_{i0}} f_{i0}, i \geq 0. \qquad (3.1.3)$$

Aldığımız (3.1.3) tənliyində i-yə qiymətlər verək:

$i = 0$ olarsa:

$$u_{11} = \frac{u_{10} \cdot u_{01}}{u_{00}} f_{00}, \qquad (3.1.4)$$

$i = 1$ olarsa:

$$u_{21} = \frac{u_{20} \cdot u_{11}}{u_{10}} f_{10},$$

burada (3.1.4)-ü nəzərə almaqla:

$$u_{21} = \frac{u_{20}}{u_{10}} \cdot \frac{u_{10} \cdot u_{01}}{u_{00}} f_{00} \cdot f_{10} = \frac{u_{20} \cdot u_{01}}{u_{00}} f_{00} \cdot f_{10}, \qquad (3.1.5)$$

(3.1.3)-də $i = 2$ olarsa:

$$u_{31} = \frac{u_{30} \cdot u_{21}}{u_{20}} f_{20},$$

(3.1.5)-i nəzərə almaqla:

$$u_{31} = \frac{u_{30}}{u_{20}} \cdot \frac{u_{20} \cdot u_{01}}{u_{00}} f_{00} \cdot f_{10} \cdot f_{20} = \frac{u_{30}}{u_{00}} \cdot u_{01} \cdot f_{00} \cdot f_{10} \cdot f_{20}. \quad (3.1.6)$$

Aldığımız (3.1.4) – (3.1.6)-dan görünür ki,

$$u_{i1} = \frac{u_{i0}}{u_{00}} \cdot u_{01} \cdot \prod_{k=0}^{i-1} f_{k0}, i \geq 0. \qquad (3.1.7)$$

Riyazi induksiya üsulundan istifadə edərək, (3.1.7)-nin asanlıqla doğru olduğunu göstərə bilərik.

İndi (3.1.2)-yə qayıdıb orada $j = 1$ olduğunu qəbul etsək:

$$u_{i+12} = \frac{u_{i+11} \cdot u_{i2}}{u_{i1}} f_{i1}, i \geq 0, \qquad (3.1.8)$$

aldığımız (3.1.8) tənliyində i-yə qiymətlər verməklə, alarıq:

$i = 0$ olarsa:

$$u_{12} = \frac{u_{11} \cdot u_{02}}{u_{01}} f_{01}, \qquad (3.1.9)$$

$i = 1$ olarsa:

$$u_{22} = \frac{u_{21} \cdot u_{12}}{u_{11}} f_{11},$$

(3.1.9)-u burada nəzərə alsaq:

$$u_{22} = \frac{u_{21}}{u_{11}} \cdot \frac{u_{11} \cdot u_{02}}{u_{01}} f_{01} \cdot f_{11} = \frac{u_{21}}{u_{01}} \cdot u_{02} f_{01} \cdot f_{11}, \qquad (3.1.10)$$

Yenə (3.1.8)-ə qayıdıb, $i = 2$ qəbul etsək:

$$u_{32} = \frac{u_{31} \cdot u_{22}}{u_{21}} f_{21},$$

burada (3.1.10)-u nəzərə almaqla:

$$u_{32} = \frac{u_{31}}{u_{21}} \cdot \frac{u_{21}}{u_{01}} \cdot u_{02} f_{01} \cdot f_{11} \cdot f_{21} = \frac{u_{31}}{u_{01}} \cdot u_{02} \cdot f_{01} \cdot f_{11} \cdot f_{21}. \quad (3.1.11)$$

Aldığımız (3.1.9) – (3.1.11)-dən görünür ki,

$$u_{i2} = \frac{u_{i1}}{u_{01}} \cdot u_{02} \cdot \prod_{k=0}^{i-1} f_{k1}, i \geq 1. \qquad (3.1.12)$$

Beləliklə (3.1.7) və (3.1.12)-yə əsasən yaza bilərik

$$u_{i2} = \frac{u_{02}}{u_{01}} \cdot \frac{u_{i0}}{u_{00}} \cdot u_{01} \cdot \prod_{k_1=0}^{i-1} f_{k_1 0} \cdot \prod_{k_2=0}^{i-1} f_{k_2 1} =$$

$$= \frac{u_{i0} \cdot u_{02}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{1} \prod_{k=0}^{i-1} f_{ks}, i \geq 1. \qquad (3.1.13)$$

Bununla da(3.1.7) və (3.1.13)-dən görünür ki, riyazi induksiya üsulu ilə

$$u_{ij} = \frac{u_{i0} \cdot u_{0j}}{u_{00}} \cdot \prod_{s=0}^{j-1} \prod_{k=0}^{i-1} f_{ks} \; i \geq 0, j \geq 0, \qquad (3.1.14)$$

ifadənin doğruluğunu göstərmək olar.

İndi isə (3.1.14) ifadəsini başqa yolla alaq.

Bunun üçün (3.1.1) tənliyinə qayıdıb, diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə alarıq:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{ij+1}}{D_1^{[I]} u_{ij}} = f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0,$$

burada j-yə qiymətlər verək:

$j = 0$ olarsa:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{i1}}{D_1^{[I]} u_{i0}} = f_{i0},$$

$j = 1$ olarsa:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{i2}}{D_1^{[I]} u_{i1}} = f_{i1},$$

$j = 2$ olarsa:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{i3}}{D_1^{[I]} u_{i2}} = f_{i2},$$

$$\vdots$$

$j = s - 3$ olarsa:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{is-2}}{D_1^{[I]} u_{is-3}} = f_{is-3},$$

$j = s - 2$ olarsa:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{is-1}}{D_1^{[I]} u_{is-2}} = f_{is-2},$$

$j = s - 1$ olarsa:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{is}}{D_1^{[I]} u_{is-1}} = f_{is-1},$$

Bu alınan ifadələri tərəf-tərəfə vuraq:

$$\frac{D_1^{[I]} u_{i1}}{D_1^{[I]} u_{i0}} \cdot \frac{D_1^{[I]} u_{i2}}{D_1^{[I]} u_{i1}} \cdot \frac{D_1^{[I]} u_{i3}}{D_1^{[I]} u_{i2}} \cdots \frac{D_1^{[I]} u_{is-2}}{D_1^{[I]} u_{is-3}} \cdot \frac{D_1^{[I]} u_{is-1}}{D_1^{[I]} u_{is-2}} \cdot \frac{D_1^{[I]} u_{is}}{D_1^{[I]} u_{is-1}} = \prod_{e=0}^{s-1} f_{ie},$$

oxşar hədləri ixtisar etdikdən sonra

$$\frac{D_1^{[I]} u_{is}}{D_1^{[I]} u_{i0}} = \prod_{e=0}^{s-1} f_{ie},$$

və ya

$$D_1^{[I]}u_{is} = D_1^{[I]}u_{i0}\prod_{e=0}^{s-1} f_{ie}\,, i \geq 0, s \geq 1. \qquad (3.1.15)$$

Alınan (3.1.15) tənliyində bir daha diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, aşağıdakı tənliyi almış olarıq:

$$\frac{u_{i+1s}}{u_{is}} = \frac{u_{i+10}}{u_{i0}}\prod_{e=0}^{s-1} f_{ie}\,, i \geq 0, s \geq 1. \qquad (3.1.16)$$

Beləliklə, ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (3.1.1) tənliyi əvvəlcə birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (3.1.15) tənliyinə, sonra isə onun açıq şəkli olan fərqlərlə (3.1.16) tənliyinə gətirilmiş oldu. İndi isə (3.1.16)-da i-yə qiymətlər verməklə, alarıq:

$i = 0$ olarsa:

$$\frac{u_{1s}}{u_{0s}} = \frac{u_{10}}{u_{00}}\prod_{e=0}^{s-1} f_{0e},$$

$i = 1$ olarsa:

$$\frac{u_{2s}}{u_{1s}} = \frac{u_{20}}{u_{10}}\prod_{e=0}^{s-1} f_{1e},$$

$i = 2$ olarsa:

$$\frac{u_{3s}}{u_{2s}} = \frac{u_{30}}{u_{20}}\prod_{e=0}^{s-1} f_{2e},$$

$i = m - 2$ olarsa:

$$\frac{u_{m-1s}}{u_{m-2s}} = \frac{u_{m-10}}{u_{m-20}}\prod_{e=0}^{s-1} f_{m-2e},$$

$i = m - 1$ olarsa:

$$\frac{u_{ms}}{u_{m-1s}} = \frac{u_{m0}}{u_{m-10}}\prod_{e=0}^{s-1} f_{m-1e},$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla alarıq:

$$\frac{u_{1s}}{u_{0s}}\cdot\frac{u_{2s}}{u_{1s}}\cdot\frac{u_{3s}}{u_{2s}}\cdots\frac{u_{m-1s}}{u_{m-2s}}\cdot\frac{u_{ms}}{u_{m-1s}}$$

$$=\frac{u_{10}}{u_{00}}\cdot\frac{u_{20}}{u_{10}}\cdot\frac{u_{30}}{u_{20}}\cdots\frac{u_{m-10}}{u_{m-20}}\cdot\frac{u_{m0}}{u_{m-10}}\cdot\cdot\prod_{e_0=0}^{s-1} f_{0e_0}\cdot\prod_{e_1=0}^{s-1} f_{1e_1}\cdot\prod_{e_2=0}^{s-1} f_{2e_2}\cdots$$

$$\cdot\prod_{e_{m-2}=0}^{s-1} f_{m-2e_{m-2}}\cdot\prod_{e_{m-1}=0}^{s-1} f_{m-1e_{m-1}},$$

Oxşar hədləri ixtisar edildikdən sonra aşağıdakı ifadəni almış oluruq:

$$\frac{u_{ms}}{u_{0s}}=\frac{u_{m0}}{u_{00}}\prod_{e=0}^{s-1}\prod_{k=0}^{m-1} f_{ke},$$

və yaxud

$$u_{ms}=\frac{u_{m0}\cdot u_{0s}}{u_{00}}\prod_{e=0}^{s-1}\prod_{k=0}^{m-1} f_{ke}\,, m\geq 1, s\geq 1 \qquad (3.1.17)$$

Bu isə (3.1.14) ifadəsidir. Bunun isbatı üçün riyazi induksiya üsulu lazım gəlmir. Belə ki, (3.1.17) ifadəsi bilavasitə (3.1.1) tənliyindən bütün mərhələlər aşkar olmaqla addım-addım alınmış oldu.

Beləliklə aşağıdakı hökmü olmış oluruq:

Teorem 3.1.1. Əgər f_{ij}, $i\geq 0, j\geq 0$ olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (3.1.1) tənliyinin ümumi həlli var və bu həll (3.1.17) şəklindədir, belə ki, orada iştirak edən u_{m0} və u_{0s}-lər $m\geq 0, s\geq 0$ olduqda ixtiyari ardıcıllıqlardır.

Koşi məsələsi: İndi isə verilmiş (3.1.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$u_{i0}=\lambda_{i0}, i\geq 1, u_{0j}=\lambda_{0j},\ j\geq 1, u_{00}=\lambda_{00}\neq 0, \qquad (3.1.18)$$

Onda (3.1.14) və ya (3.1.17)-dən alarıq:

$$u_{ij}=\frac{\lambda_{i0}\cdot\lambda_{0j}}{\lambda_{00}}\prod_{s=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{i-1} f_{ks}\,, i\geq 1, j\geq 1 \qquad (3.1.19)$$

Beləliklə alırıq:

Teorem 3.1.2. Teorem 3.1.1-in şərtləri daxilində, əgər verilmiş λ_{i0}, $i\geq 1$; λ_{0j}, $j\geq 1$; və λ_{00} həqiqi ədədlər olmaqla $\lambda_{00}\neq 0$ olarsa, onda (3.1.1), (3.1.18) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.1.19) şəklindədir.

Doğrudan da verilmiş (3.1.18) başlanğıc şərtləri (3.1.1) tənliyinin ümumi həlli olan (3.1.14) və ya (3.1.17)-də olan ixtiyari sabitləri birqiymətli təyin etməyə imkan verir.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (3.1.1) tənliyinə i-nin $0 \le i \le N-1$, j-nin isə $0 \le j \le M-1$ qiymətləri üçün baxıb, onun üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri verək:

$$\begin{cases} a_i^{(1)} u_{i0} + a_i^{(2)} u_{iM} = a_i, i \ge 0, \\ b_j^{(1)} u_{0j} + b_j^{(2)} u_{Nj} = b_j, j \ge 0, \end{cases} \tag{3.1.20}$$

burada $a_i^{(1)}$,$a_i^{(2)}$,a_i, $i \ge 0$; $b_j^{(1)}$,$b_j^{(2)}$,b_j,$j \ge 0$; olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar olub, (3.1.20) sərhəd şərtləri xətti asılı deyil.

Verilmiş (3.1.20) sərhəd şərtlərində $i = 0, i = N, j = 0$ və $j = M$ qiymətləri üçün alarıq:

$$\begin{cases} a_0^{(1)} u_{00} + a_0^{(2)} u_{0M} = a_0, \\ a_N^{(1)} u_{N0} + a_N^{(2)} u_{NM} = a_N \\ b_0^{(1)} u_{00} + b_0^{(2)} u_{N0} = b_0, \\ b_M^{(1)} u_{0M} + b_M^{(2)} u_{NM} = b_M \end{cases} \tag{3.1.21}$$

Aldığımız (3.1.21) sistemindən u_{00}, u_{N0}, u_{0M} və u_{NM}-ləri təyin edək. Bunun üçün ikinci tənliyi $b_M^{(2)}$-yə, dördüncü tənliyi isə $a_N^{(2)}$vurub, alınan ifadələri tərəf-tərəfə çıxaq:

$$-\begin{cases} a_N^{(1)} b_M^{(2)} u_{N0} + a_N^{(2)} b_M^{(2)} u_{NM} = a_N b_M^{(2)}, \\ a_N^{(2)} b_M^{(1)} u_{0M} + a_N^{(2)} b_M^{(2)} u_{NM} = b_M a_N^{(2)}, \end{cases}$$

$$a_N^{(1)} b_M^{(2)} u_{N0} - a_N^{(2)} b_M^{(1)} u_{0M} = a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)}. \tag{3.1.22}$$

İndi isə (3.1.21) sisteminin birinci tənliyini $b_0^{(1)}$-ə üçüncü tənliyi isə $a_0^{(1)}$-ə vurub, alınan ifadələri tərəf-tərəfə çıxaq:

$$-\begin{cases} a_0^{(1)} b_0^{(1)} u_{00} + a_0^{(2)} b_0^{(1)} u_{0M} = a_0 b_0^{(1)}, \\ a_0^{(1)} b_0^{(1)} u_{00} + a_0^{(1)} b_0^{(2)} u_{N0} = b_0 a_0^{(1)} \end{cases}$$

$$a_0^{(2)} b_0^{(1)} u_{0M} - a_0^{(1)} b_0^{(2)} u_{N0} = a_0 b_0^{(1)} - b_0 a_0^{(1)}. \tag{3.1.23}$$

Alınan (3.1.22) və (3.1.23) tənliklərinə sistem kimi baxıb, onlardan u_{N0} və u_{0M}-məchullarını təyin edək.

$$\begin{cases} a_N^{(1)} b_M^{(2)} u_{N0} - a_N^{(2)} b_M^{(1)} u_{0M} = a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)}, \\ a_0^{(1)} b_0^{(2)} u_{N0} - a_0^{(2)} b_0^{(1)} u_{0M} = b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)}. \end{cases} \tag{3.1.24}$$

Qəbul edək ki,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_N^{(1)} b_M^{(2)} & -a_N^{(2)} b_M^{(1)} \\ a_0^{(1)} b_0^{(2)} & -a_0^{(2)} b_0^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.1.25}$$

Onda (3.1.24) sistemindən

$$\begin{cases} u_{N0} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} & -a_N^{(2)} b_M^{(1)} \\ b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} & -a_0^{(2)} b_0^{(1)} \end{vmatrix}, \\ u_{0M} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} a_N^{(1)} b_M^{(2)} & a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} \\ a_0^{(1)} b_0^{(2)} & b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} \end{vmatrix}. \end{cases} \tag{3.1.26}$$

Beləliklə axtarılan ədədlərdən ikisi (3.1.26) vasitəsi ilə təyin edilmiş olur. İndi isə u_{00} və u_{NM}-ləri (3.1.21) sitemindən təyin edək

$$\begin{cases} u_{00} = \frac{a_0}{a_0^{(1)}} - \frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}} \cdot \frac{1}{\Delta_1} = \begin{vmatrix} a_N^{(1)} b_M^{(2)} & a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} \\ a_0^{(1)} b_0^{(2)} & b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} \end{vmatrix}, \\ u_{NM} = \frac{a_N}{a_N^{(2)}} - \frac{a_N^{(1)}}{a_N^{(2)}} \cdot \frac{1}{\Delta_1} = \begin{vmatrix} a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} & -a_N^{(2)} b_M^{(1)} \\ b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} & -a_0^{(2)} b_0^{(1)} \end{vmatrix}. \end{cases} \tag{3.1.27}$$

İndi isə (3.1.14)-ə qayıdıb, orada əvvəlcə $j = M$, sonra isə yenidən (3.1.14)-də $i = N$ yazmaqla alarıq:

$$u_{iM} = \frac{u_{i0} \cdot u_{0M}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{M-1} \prod_{k=0}^{i-1} f_{ks}\, , i \geq 1, \tag{3.1.28}$$

$$u_{Nj} = \frac{u_{N0} \cdot u_{0j}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{j-1} \prod_{k=0}^{N-1} f_{ks}\, , j \geq 1. \tag{3.1.29}$$

Aldığımız tənliklərə verilmiş (3.1.20) şərtlərini qoşmaqla bu dörd tənlikdən, u_{i0}, u_{0j}, u_{iM} və u_{Nj}- məchulları təyin edilə bilər.

Bunun üçün əvvəlcə (3.1.28)-i (3.1.20)-nin birinci sistemində nəzərə almaqla (u_{iM}-i yox etsək):

$$a_i^{(1)} u_{i0} + a_i^{(2)} \frac{u_{i0} \cdot u_{0M}}{u_{00}} \prod_{s=0}^{M-1} \prod_{k=0}^{i-1} f_{ks} = a_i\, , i \geq 1,$$

aldığımız bu tənlikdən u_{i0} təyin edilir

$$u_{i0}=\frac{a_i}{a_i^{(1)}+a_i^2\frac{u_{0M}}{u_{00}}\prod_{s=0}^{M-1}\prod_{k=0}^{i-1}f_{ks}},i\geq 1,$$

Burada (3.1.26) və (3.1.27)-ni nəzərə almaqla:

$$u_{i0}=\frac{a_i}{a_i^{(1)}+a_i^{(2)}\cdot\frac{\frac{1}{\Delta_1}\cdot\begin{vmatrix}a_N^{(1)}b_M^{(2)} & a_Nb_M^{(2)}-b_Ma_N^{(2)}\\ a_0^{(1)}b_0^{(2)} & b_0a_0^{(1)}-a_0b_0^{(1)}\end{vmatrix}}{\frac{a_0}{a_0^{(1)}}-\frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}}\cdot\frac{1}{\Delta_1}\cdot\begin{vmatrix}a_N^{(1)}b_M^{(2)} & a_Nb_M^{(2)}-b_Ma_N^{(2)}\\ a_0^{(1)}b_0^{(2)} & b_0a_0^{(1)}-a_0b_0^{(1)}\end{vmatrix}}\prod_{s=0}^{M-1}\prod_{k=0}^{i-1}f_{ks}}=$$

$$=\frac{\frac{a_i}{a_0^{(1)}}\left\{a_0-a_0^{(2)}\frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix}a_N^{(1)}b_M^{(2)} & a_Nb_M^{(2)}-b_Ma_N^{(2)}\\ a_0^{(1)}b_0^{(2)} & b_0a_0^{(1)}-a_0b_0^{(1)}\end{vmatrix}\right\}}{\frac{1}{\Delta_1}\cdot\begin{vmatrix}a_N^{(1)}b_M^{(2)} & a_Nb_M^{(2)}-b_Ma_N^{(2)}\\ a_0^{(1)}b_0^{(2)} & b_0a_0^{(1)}-a_0b_0^{(1)}\end{vmatrix}\left(-a_i^{(1)}\frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}}+a_i^{(2)}\prod_{s=0}^{M-1}\prod_{k=0}^{i-1}f_{ks}\right)+a_i^{(1)}\frac{a_0}{a_0^{(1)}}}$$

$$i\geq 1. \qquad (3.1.30)$$

Eyni qayda ilə (3.1.29)-u (3.1.20)-nin ikincisində nəzərə almaqla, u_{Nj}- ni yox etməklə alarıq:

$$b_j^{(1)}u_{0j}+b_j^{(2)}\frac{u_{N0}\cdot u_{0j}}{u_{00}}\prod_{s=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{N-1}f_{ks}=b_j,j\geq 1,$$

buradan u_{0j}-ni təyin edək:

$$u_{0j}=\frac{b_j}{b_j^{(1)}+b_j^2\frac{u_{N0}}{u_{00}}\prod_{s=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{N-1}f_{ks}},j\geq 1.$$

Bu aldığımız ifadədə (3.1.26) və (3.1.27)-ni nəzərə almaqla (3.1.30)-a analoji olaraq u_{0j}- təyin edilmiş olur.

$$u_{0j}=\frac{b_j}{b_j^{(1)}+b_{j1}^{(2)}\cdot\frac{\frac{1}{\Delta_1}\cdot\begin{vmatrix}a_Nb_M^{(2)}-b_Ma_N^{(2)} & -a_N^{(2)}b_M^{(1)}\\ b_0a_0^{(1)}-a_0b_0^{(1)} & -a_0^{(2)}b_0^{(1)}\end{vmatrix}}{\frac{a_0}{a_0^{(1)}}-\frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}}\cdot\frac{1}{\Delta_1}\cdot\begin{vmatrix}a_N^{(1)}b_M^{(2)} & a_Nb_M^{(2)}-b_Ma_N^{(2)}\\ a_0^{(1)}b_0^{(2)} & b_0a_0^{(1)}-a_0b_0^{(1)}\end{vmatrix}}\prod_{s=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{N-1}f_{ks}}=$$

$$= \frac{\frac{b_j}{a_0^{(1)}}\left\{a_0 - a_0^{(2)}\frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} a_N^{(1)} b_M^{(2)} & a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} \\ a_0^{(1)} b_0^{(2)} & b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} \end{vmatrix}\right\}}{b_j^{(1)}\frac{a_0}{a_0^{(1)}} - b_j^{(1)}\frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}}\frac{1}{\Delta_1}\cdot\begin{vmatrix} a_N^{(1)} b_M^{(2)} & a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} \\ a_0^{(1)} b_0^{(2)} & b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} \end{vmatrix} + b_j^{(2)}\begin{vmatrix} a_N b_M^{(2)} - b_M a_N^{(2)} & -a_N^{(2)} b_M^{(1)} \\ b_0 a_0^{(1)} - a_0 b_0^{(1)} & -a_0^{(2)} b_0^{(1)} \end{vmatrix}\cdot\frac{1}{\Delta_1}\prod_{s=0}^{i-1}\prod_{k=0}^{N-1} f_{ks}} \quad j \geq 1. \qquad (3.1.31)$$

Beləliklə, bütün ixtiyari sabitlər (3.1.1)-in ümumi həllində olan (3.1.20) sərhəd şərtlərinin köməyi ilə təyin edilmiş oldular.

Teorem 3.1.3. Teorem 3.1.1-in şərtləri daxilində burada $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, a_i, i \geq 0;$ $b_j^{(1)}, b_j^{(2)}, b_j, j \geq 0;$ olduqda həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardısa, (3.1.20) şərtləri xətti asılı deyilsə, (3.1.25) şərti ödənilərsə, $u_{00} \neq 0$, (3.1.30) və (3.1.31) təyin olunmuşdursa onda (3.1.1),(3.1.20) sərhəd məsələsinin həlli var və bu həll (3.1.17) ümumi həldən (3.1.30) və (3.1.31)-in köməyi ilə alınır.

3.2. Üçüncü tərtib qarışıq diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq

$$D_2^{[I]} D_1^{(II)} u_{ij} = f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0, \qquad (3.2.1)$$

burada $f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$ verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıq, $u_{ij}, i \geq 0, j \geq 0$ olduqda axtarılan ardıcıllıqdır.

Diskret multiplikativ törəmənin tərifini tətbiq etməklə alırıq:

$$\frac{D_1^{(II)} u_{ij+1}}{D_1^{(II)} u_{ij}} = f_{ij}, i \geq 0, j \geq 0,$$

burada j-yə qiymətlər verməklə:

$$\frac{D_1^{(II)} u_{i1}}{D_1^{(II)} u_{i0}} = f_{i0},$$

$$\frac{D_1^{(II)} u_{i2}}{D_1^{(II)} u_{i1}} = f_{i1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{D_1^{(II)} u_{ij}}{D_1^{(II)} u_{ij-1}} = f_{ij-1},$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə vursaq, alarıq:

$$\frac{D_1^{(II)} u_{ij}}{D_1^{(II)} u_{i0}} = \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik},$$

və ya

$$D_1^{(II)} u_{ij} = D_1^{(II)} u_{i0} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}\,, j = 0. \qquad (3.2.2)$$

Aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$g_{ij} = g_{ij}\left(D_1^{(II)} u_{i0}, f_{ik}\right) = D_1^{(II)} u_{i0} \cdot \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}\,, j \geq 1, \qquad (3.2.3)$$

onda (3.2.2) tənliyi

$$D_1^{(II)} u_{ij} = g_{ij}, i \geq 1, j \geq 1, \qquad (3.2.4)$$

şəklinə düşmüş olur. Bununla da biz üçüncü tərtib diskret qarışıq törəməli (3.2.1) tənliyini ikinci tərtib diskret additiv törəməli (xətti) (3.2.4) tənliyinə gətirmiş oluruq

İndi diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə (3.2.4)-dən alarıq:

$$D_1^{(I)} u_{i+1j} - D_1^{(I)} u_{ij} = g_{ij},$$

və ya

$$D_1^{(I)} u_{i+1j} = D_1^{(I)} u_{ij} + g_{ij}, i \geq 0, j \geq 1, \qquad (3.2.5)$$

ifadəsi almış olur. Burada $i = 0$ olarsa,

$$D_1^{(I)} u_{1j} = D_1^{(I)} u_{0j} + g_{0j},$$

$i = 1$ olarsa

$$D_1^{(I)} u_{2j} = D_1^{(I)} u_{1j} + g_{1j} = D_1^{(I)} u_{0j} + g_{0j} + g_{1j},$$

ifadəsi alınır. Bu prosesi davam etdirsək:

$$D_1^{(I)} u_{ij} = D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{k=0}^{i-1} g_{kj}\,, i \geq 1, j \geq 1, \qquad (3.2.6)$$

münasibətini almış olarıq.

Nəhayət (3.2.6)-da i-yə qiymətlər verməklə bir daha (sol tərəf üçün) diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$u_{2j} - u_{1j} = D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{k=0}^{0} g_{kj},$$

$$u_{3j} - u_{2j} = D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{k=0}^{1} g_{kj},$$

$$u_{4j} - u_{3j} = D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{k=0}^{2} g_{kj},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{ij} - u_{i-1j} = D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{k=0}^{i-2} g_{kj},$$

Bunları cəmləsək:

$$u_{ij} = u_{1j} + (i-1) D_1^{(I)} u_{0j} + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kj}, i \geq 2, j \geq 1, \qquad (3.2.7)$$

Teorem 3.2.1. Əgər $f_{ij,}\ i \geq 0; j \geq 0;$ olduqda verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqdırsa, onda (3.2.1) tənliyinin (3.2.7) şəkilli ümumi həlli mövcuddur, belə ki, u_{jj}, u_{0j} və u_{i0} ixtiyari ardıcıllıqlardır.

Koşi məsələsi: Verilmiş (3.2.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$u_{ij} = \alpha_{ij}, i \geq 0, j = 0; i = 0, j \geq 0; i = 1, j \geq 0, \qquad (3.2.8)$$

onda

$$D_1^{(II)} u_{i0} = \left(u_{i+1,0} - u_{i0}\right)^{(I)} = u_{i+2,0} - 2u_{i+1,0} + u_{i0} = \alpha_{i+2,0} - 2\alpha_{i+1,0} + \alpha_{i,0}, i \geq 0,$$

$$D_1^{(I)} u_{0j} = u_{1j} - u_{0j} = \alpha_{1j} - \alpha_{0j}, j \geq 0,$$

$$u_{1j} = \alpha_{1j}, j \geq 0, \qquad (3.2.9)$$

olduğundan (3.23), (3.26) və (3.27)-dən alarıq:

$$g_{ij} = \left(\alpha_{i+2,0} - 2\alpha_{i+1,0} + \alpha_{i,0}\right) \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}, j \geq 1, \qquad (3.2.10)$$

$$D_1^{(I)} u_{ij} = \left(\alpha_{1j} - \alpha_{0j}\right) + \sum_{s=0}^{i-1} g_{sj}, i \geq 2, j \geq 1, \qquad (3.2.11)$$

$$u_{ij} = \alpha_{ij} + (i-1)\left(\alpha_{1j} - \alpha_{0j}\right) + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kj}, i \geq 2, j \geq 1, \qquad (3.2.12)$$

Beləliklə, alırıq.

Teorem 3.2.2. Teorem 3.2.1.-in şərtləri daxilində, əgər α_{ij}-lər verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardırsa, onda (3.2.1), (3.2.9) Koşi məsələsinin həlli var və bu həll (3.2.12) şəklindədir, belə ki, g_{ij} -lər (3.2.10) vasitəsi ilə təyin edilmiş olurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (3.2.1) tənliyinə i, j-nin $0 \le i \le N-1, 0 \le j \le M-1$ qiymətlərində baxmaqla, bu tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri verək:

$$\begin{cases} D_1^{(II)} u_{i0} + a_i u_{NM} = A_i, i \ge 0, \\ D_1^{(I)} u_{0j} + b_j u_{NM} = B_j, j \ge 0, \\ u_{1j} + c_j u_{Nj} = C_j, j \ge 0. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Burada a_i, A_i, b_j, B_j, c_j və C_j-lər verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlardır.

Onda (3.2.3) və (3.2.7)-dən alarıq:

$$g_{ij} = (A_i - a_i u_{NM}) \prod_{k=0}^{j-1} f_{ik}, i \ge 0, j \ge 1, \tag{3.2.14}$$

$$u_{ij} = \left(C_j - c_j u_{Nj}\right) + (i-1)\left(B_j - b_j u_{NM}\right) + + \sum_{s=0}^{i-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kj}, i = 2, j \ge 1, \tag{3.2.15}$$

Alınan bu ifadələrdən (3.2.15)-də $i = N, j = M$ götürsək, alarıq:

$$u_{NM} = (C_M - c_M u_{NM}) + +(N-1)(B_M - b_M u_{NM}) + \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} g_{kM},$$

burada isə (3.2.14)-dən $i = N, j = M$ olduqda alınan ifadəni yazmaqla

$$u_{NM} = [C_M + (N-1)B_M] - [c_M + (N-1)b_M]u_{NM} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} (A_k - a_k u_{NM}) \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip} =$$

$$= [C_M + (N-1)B_M] - [c_M + (N-1)b_M]u_{NM} + + \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} A_k \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip}$$

$$- u_{NM} \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{s} a_k \prod_{p=0}^{M-1} f_{ip}$$

buradan da,

$$\left\{1+c_M+(N-1)b_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}a_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}\right\}u_{NM}=$$

$$=C_M+(N-1)B_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}A_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}, \qquad (3.2.16)$$

nəhayət, əgər

$$1+c_M+(N-1)b_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}a_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}\neq 0, \qquad (3.2.17)$$

şərti ödənilərsə, onda (3.2.16)-dan

$$u_{NM}=\frac{C_M+(N-1)B_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}A_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}}{1+c_M+(N-1)b_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}a_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}}, \qquad (3.2.18)$$

olduğunu alırıq. Bu ifadəni (3.2.14)-də yazsaq, g_{ij} üçün heç bir ixtiyarilik saxlamayan

$$g_{ij}=\left[A_i-a_i\frac{C_M+(N-1)B_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}A_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}}{1+c_M+(N-1)b_M+\sum_{s=0}^{N-2}\sum_{k=0}^{s}a_k\prod_{p=0}^{M-1}f_{ip}}\right]\prod_{k=0}^{j-1}f_{ik},$$

$$i\geq 0, j\geq 1, \qquad (3.2.19)$$

analitik ifadəsini, nəhayət (3.2.18) və (3.2.19)-u (3.2.15)-də yazmaqla (3.2.1), (3.2.13) sərhəd məsələsinin həllini almış oluruq.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü alırıq.

Teorem 3.2.3. Teorem 3.2.1-in şərtləri daxilində, əgər a_i, A_i, b_j, B_j, c_j və C_j-lər verilmiş həqiqi qiymətli ardıcıllıqlar olmaqla (3.2.17) şərti ödənilərsə, onda (3.2.1), (3.2.13) sərhəd məsələsinin həlli var və bu həll (3.2.18) və (3.2.19)-un köməyi ilə (3.2.15)-dən alınır.

3.3. İki dəyişənli ikinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması

Burada iki dəyişəndən asılı olan xüsusi törəməli ikinci tərtib kəsilməz multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün məsələlərə baxılacaqdır.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$D_yD_xu(x,y)=f(x,y),\ x>0,\ y>0 \qquad (3.3.1)$$

burada $f(x,y)$ verilmiş kəsilməz funksiyadır. Əgər

$$D_x u(x,y) = v(x,y), \tag{3.3.2}$$

əvəzləməsi aparsaq, (3.3.1) tənliyi

$$D_y v(x,y) = f(x,y), \tag{3.3.3}$$

şəklinə düşmüş olar. Multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, (3.3.3) tənliyi aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\frac{\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}}{v(x,y)} = f(x,y),$$

və ya

$$\frac{\partial \ln v(x,y)}{\partial y} = f(x,y), \tag{3.3.4}$$

Aldığımız (3.3.4) kəsilməz additiv törəməli diferensial tənlik olduğundan, onu inteqrallasaq alarıq:

$$ln\frac{v(x,y)}{C_1(x)} = \int_0^y f(x,\eta)d\eta,$$

və ya

$$v(x,y) = C_1(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta}, \tag{3.3.5}$$

burada $C_1(x)$ – ixtiyari funksiyadır.

Aldığımız (3.3.5) ifadəsini (3.3.2) də nəzərə almaqla bu tənliyi aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\frac{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)} = C_1(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta},$$

və yaxud

$$\frac{\partial \ln u\,(x,y)}{\partial x} = C_1(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta},$$

Bu ifadəni inteqrallasaq:

$$ln\frac{u(x,y)}{C_2(y)} = \int_0^x C_1(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}d\xi,$$

yaxud da

$$u(x,y) = C_2(y)e^{\int_0^x C_1(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}d\xi}, \tag{3.3.6}$$

Beləliklə (3.3.1) tənliyinin ümumi həlli üçün (3.3.6) ifadəsini almış oluruq, belə ki $C_1(\xi)$ və $C_1(y)$ ixtiyari funksiyalardır.

İndi isə (3.3.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$u(0,y)=\varphi(y)\,,\quad D_x u(x,0)=\psi(x), \tag{3.3.7}$$

burada $\varphi(y)$ və $\psi(x)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardır.

Verilmiş (3.3.1) tənliyi üçün aldığımız (3.3.6) ümumi həllinə daxil olan $C_1(x)$ və $C_2(y)$ ixtiyari funksiyalarını verilmiş (3.3.7) başlanğıc şərtlərindən istifadə etməklə tapmalıyıq. Ümumi həllin ifadəsindən göründüyü kimi

$$u(0,y)=C_2(y)=\varphi(y), \tag{3.3.8}$$

$$D_x u(x,0)=D_x u(x,y)|_{y=0}=v(x,y)|_{y=0}=v(x,0),$$

burada (3.3.7)-ni nəzərə almaqla

$$D_x u(x,0)=C_1(x)=\psi(x). \tag{3.3.9}$$

Beləliklə (3.3.1), (3.3.7) Koşi məsələsinin həlli üçün (3.3.8) və (3.3.9)-u (3.3.6) da nəzərə almaqla aşağıdakı ifadəni almış olarıq:

$$u(x,y)=\varphi(y)e^{\int_0^x \psi(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}d\xi}, \tag{3.3.10}$$

Asanlıqla görünür ki, (3.3.10) ifadəsi (3.3.7) başlanğıc şərtlərindən birincisini ödəyir.

$$D_x u(x,0)=D_x\varphi(0)e^{\int_0^x \psi(\xi)d\xi}=\frac{\varphi(0)e^{\int_0^x \psi(\xi)d\xi}\cdot\psi(x)}{\varphi(0)e^{\int_0^x \psi(\xi)d\xi}},$$

ifadəsindən görünür ki, (3.3.10) ikinci başlanğıc şərtini də ödəyir.

İndi isə göstərək ki, (3.3.10) ifadəsi (3.3.1) tənliyini ödəyir.

$$D_x u(x,y)=\frac{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{u(x,y)}=\frac{\varphi(y)e^{\int_0^x \psi(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}d\xi}\cdot\psi(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta}}{\varphi(y)e^{\int_0^x \psi(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}d\xi}}=$$

$$=\psi(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta}$$

$$D_yD_x u(x,y)=D_y\big(D_x u(x,y)\big)=\frac{\frac{\partial D_x u(x,y)}{\partial y}}{D_x u(x,y)}=\frac{\psi(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta}\cdot f(x,y)}{\psi(x)e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta}}=f(x,y)$$

ifadəsi göstərir ki, (3.3.10) ifadəsi (3.3.1) tənliyini də ödəyir.

İndi isə (3.3.1) tənliyin $x \in (0, l)$, $y \in (0, s)$ də baxmaqla bu tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$\begin{cases} a^{(1)}(x) D_x u(x,0) + a^{(2)}(x) D_x u(x,s) = a(x), x \in (0,l), \\ b^{(1)}(y) u(0,y) + b^{(2)}(y) u(l,y) = b(y), y \in (0,s), \end{cases} \qquad (3.3.11)$$

burada $a^{(k)}(x), b^{(k)}(y)$, $k = 1,2$, $a(x)$ və $b(y)$ verilmiş kəsilməz funksiyalardır.

Verilmiş (3.3.1) tənliyinin ümumi həlli üçün aldığımız (3.3.6) ifadəsindəki $C_1(x)$ və $C_2(y)$ ixtiyari funksiyalarını (3.3.11) sərhəd şərtlərinin köməyi ilə təyin etməliyik:

$$b^{(1)}(y) C_2(y) + b^{(2)}(y) C_2(y) e^{\int_0^{\ell} C_1(\xi) e^{\int_0^y f(\xi,\eta) d\eta} d\xi} = b(y),$$

buradan

$$C_2(y) = \frac{b(y)}{b^{(1)}(y) + b^{(2)}(y) e^{\int_0^{\ell} C_1(\xi) e^{\int_0^y f(\xi,\eta) d\eta} d\xi}}, \qquad (3.3.12)$$

əgər

$$b^{(1)}(y) + b^{(2)}(y) e^{\int_0^{\ell} C_1(\xi) e^{\int_0^y f(\xi,\eta) d\eta} d\xi} \neq 0, \qquad (3.3.13)$$

şərti ödənilirsə,

$$a^{(1)}(x) \frac{C_2(0) e^{\int_0^x C_1(\xi) d\xi} a(x)}{C_2(0) e^{\int_0^x C_1(\xi) d\xi}} + a^{(2)}(x) \frac{C_2(y) e^{\int_0^x C_1(\xi) e^{\int_0^y f(\xi,\eta) d\eta} d\xi} C_1(x) e^{\int_0^s f(x,\eta) d\eta}}{C_2(y) e^{\int_0^x C_1(\xi) e^{\int_0^y \gamma(\xi,\eta) d\eta} d\xi}} =$$

$$= a(x),$$

və ya

$$a^{(1)}(x) C_1(x) + a^{(2)}(x) C_1(x) e^{\int_0^s f(x,\eta) d\eta} = a(x),$$

yaxud da

$$C_1(x) = \frac{a(x)}{a^{(1)}(x) + a^{(2)}(x) e^{\int_0^S f(x,\eta) d\eta}}, \qquad (3.3.14)$$

əgər

$$a^{(1)}(x) + a^{(2)}(x) e^{\int_0^s f(x,\eta) d\eta} \neq 0, \qquad (3.3.15)$$

şərti ödənilirsə.

Beləliklə $x \in (0, l),\ y \in (0, s)$ də baxılan (3.3.1) tənliyi üçün (3.3.11) sərhəd şərtləri daxilində məsələnin həlli üçün

$$u(x,y) = \frac{b(y)}{b^{(1)}(y) + b^{(2)}(y) e^{\int_0^{\ell} \frac{a(\xi)}{a^{(1)}(\xi)+a^{(2)}(\xi)e^{\int_0^y f(\zeta,\eta)d\eta}} e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta} d\xi}} \cdot$$

$$\cdot\, e^{\int_0^{x} \frac{a(\xi)}{a^{(1)}(\xi)+a^{(2)}(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}} e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta} d\xi} \tag{3.3.16}$$

ifadəsi alınmış olur, əgər

$$a^{(1)}(x) + a^{(2)}(x) e^{\int_0^y f(x,\eta)d\eta} \neq 0, \tag{3.3.17}$$

və

$$b^{(1)}(y) + b^{(2)}(y) e^{\int_0^{\ell} \frac{a(\xi)}{a^{(1)}(\xi)+a^{(2)}(\xi)e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta}} e^{\int_0^y f(\xi,\eta)d\eta} d\xi} \neq 0, \tag{3.3.18}$$

şərti ödənilirsə.

Teorem. Əgər (3.3.1), (3.3.7) Koşi məsələsində $f(x,y)$, $\varphi(y)$ və $\psi(y)$ kəsilməz funksiyalardırsa, onda bu Koşi məsələsinin həlli (3.3.10) vasitəsi ilə verilir, (3.3.1), (.3.3.11) sərhəd məsələsinin həlli isə $f(x,y)$, $a^k(x)$, $b^k(y)$, $k = 1,2;\ a(x)$; və $b(y)$ verilmiş kəsilməz funksiyalar olub, (3.3.17) və (3.3.18) şərtləri ödənilirsə, bu sərhəd məsələsinin həlli (3.3.16) vasitə ilə verilmiş olur.

Eyni qayda ilə birinci arqumentə nəzərən ikinci tərtib kəsilməz additiv törəmənin, ikinci arqumentə nəzərən kəsilməz poverativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib diferensial tənlik üçün məsələlər də araşdırılır.

Nəticə

Dissertasiya işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır.

1. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli adi ikihədli differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır [7], [8].

2. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli adi ikihədli differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır [9]-[12].

3. Üçüncü tərtib iki diskret multiplikativ törəmənin diskret additiv törəməsindən alınan adi ikihədli differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllərinin analitik ifadəsi alınmışdır [94], [95].

4. Üçüncü tərtib diskret additiv törəmənin ikinci tərtib diskret multiplikativ törəməsindən alınan adi ikihədli differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllərinin analitik ifadəsi alınmışdır [96], [97].

5. Çoxdəyişənli diskret iki ölçülü, iki tərtibli, hər dəyişənə nəzərən diskret multiplikativ törəməli ikihədli differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həllinin analitik ifadələri qurulmuşdur [52], [99].

6. Çoxdəyişənli diskret iki ölçülü, üç tərtibli, birinci arqumentə nəzərən ikinci tərtib diskret additiv törəmənin ikinci arqumentə nəzərən diskret multiplikativ törəməsindən alınan ikihədli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllərinin analitik ifadələri qurulmuşdur [98].

7. Hər fəslin axırında kəsilməz törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılaraq, onların həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı

1. Əhmədova, H.M. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika tarixindən / H.M.Əhmədova. – Bakı: Şərq-Qərb, – 2013. – 563 s.
2. Əliyev, N.Ə. Diskret multiplikativ analiz / Ə.N.Əliyev, Q.A.Bağırov, A.N.İsayeva // "Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri" mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, – Bakı, – 2010. – s. 24-30.
3. Əliyev, N.Ə. Ədədi çoxluğun genişlənmə mərhələləri / – Bakı, Məktəblinin kitabxanası, Riyaziyyat, – 2010. № 40. – s. 48.
4. Makaraçev, J.H. Cəbr: Orta məktəbin VIII sinfi üçün dərs vəsaiti / J.H.Makaraçev, H.G.Mindyuk, V.M.Monaxov, K.S.Mudroviç, S.B.Suvorova – Lənkəran: Maarif, – 1980.
5. Makaraçev J.H., Mindyuk H.G., Monaxov V.M., Mudroviç K.S., Suvorova S.B. "Cəbr və analizin başlanğıcı", Orta məktəbin IX sinfi üçün dərs vəsaiti. "Maarif", Bakı, 1980, 306 səh
6. Makaraçev J.H., Mindyuk H.G., Monaxov V.M., Mudroviç K.S., Suvorova S.B. "Cəbr", Orta məktəbin X sinfi üçün dərs vəsaiti. "Maarif", Bakı, 1980, 277səh.
7. Məmiyeva, T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi / – Bakı, BDU-nun Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, – 2017. №1. – s. 15-19.
8. Məmiyeva, T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi / T.S.Məmiyeva, N.Ə.Əliyev // "Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı" mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, – Lənkəran, – 2016. – s. 4-5.
9. Məmiyeva, T.S. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli / T.S.Məmiyeva, N.Ə.Əliyev // Gənc tədqiqatçıların IV Beynəlxalq Elmi Konfransı, – Bakı, – 2016.– I kitab. – s.124.
10. Məmiyeva, T.S. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün məsələlər– Bakı Mühəndislik Universiteti, riyaziyyat və komputer elmləri seriyası, – 2019. – s. 106-112.

11. Məmiyeva, T.S. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün həlli sərhəd məsələlərinin həlli // Doktorantların və Gənc tədqiqatçıların XX Respublika Elmi Konfransının Materialları, Bakı – 2016. – s. 34-35.
12. Məmiyeva, T.S. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli / T.M.Məmiyeva, N.Ə.Əliyev,// “Gənc Tədqiqatcıların IV Beynelxalq ” elmi-praktiki konfransı, – Bakı, – Bakı Mühəndislik Universiteti, – 2016. – s. 124-125.
13. Məmmədzadə, A.M. Diskret poverativo-additivo-multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinin həllinin araşdırılması // Böyük Azərbaycan şairi İmadəddin Nəsiminin 650 illik yubileyinə həsr olunmuş “Doktorant və Gənc tədqiqatçıların XXIII Respublika Elmi Konfransı, – Bakı, – Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti, – 2019. I cild. – s. 33-35.
14. Məmmədzadə, A.M. Diskret poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlər / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov // – Bakı, Azərbaycan Texniki Universiteti, Texnika Elmləri, Elmi əsərlər, – 2018. №2. – s. 90-94.
15. Məmmədzadə, A.M. Diskret yeni törəmənin xassələri // “Müasirləşən Azərbaycan: Yeni yüksəliş mərhələsi” mövzusunda keçirilən gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi Konfransının Materialları, – Lənkəran, – 2017. – s. 29-30.
16. Məmmədzadə, A.M. İkinci tərtib diskret multiplikativo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həlli / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov // “İnteqrasiya mühitində Azərbaycan elminin qarşısında duran vəzifələr” mövzusunda Respublika Elmi Konfransının materialları, – Lənkəran, Lənkəran Dövlət Universiteti, – 23-24 dekabr, – 2018. – s. 24-25.
17. Məmmədzadə, A.M. İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həlli // – Lənkəran: Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi Xəbərləri, Təbiət elmləri – 2018. №1, – s. 55-58.
18. Məmmədzadə, A.M. İkinci tərtib diskret poverativo-additiv törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli // Tədris prosesində elmi innovasiyalarin tətbiqi yolları mövzusunda Ümummilli Lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı

ildönümünə həsr olunmuş Respublika elmi-praktik konfransı, – Lənkəran, – 7-8 may, – 2019. – s. 59-60.

19. Məmmədzadə, A.M. Üçüncü tərtib diskret multiplikativo-additivo-poverativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllinin araşdırılması // İnternational Euroasia Congress on Scientific Researches and Recent Trends – V, Abstract Book, Hazar University, – Baku Azerbaijan. – 2019, s. 212-216.

20. Məmmədzadə, A.M.Yeni birinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli / / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov // – Lənkəran Dövlət Universiteti, Elmi Xəbərlər, Təbiət bölməsi, – 2018. №2. S. 46-50.

rus dilində

21. Архимед Сочинения, М.,1962, Математическая энциклопедия, 2, «Советская энциклопедия», 1104 (см. интегральное исчисление, 573).

22. Адамар, Ж. Задача Коши для уравнения с частными производными гиперболического типа / Ж.Адамар. – Москва: Наука, – 1978. – 352 с.

23. Алексеевский, В.А. Разностная схема высокого порядка точности для сингулярного возмушенной краевой задачи // – Дифференциальные уравнения, – 1981. т. XVII, №7. – с. 1171-1192.

24. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И.Арнольд. – Москва: Наука, – 1971. – 240 с.

25. Берс, Л. Уравнения с частными производными / Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер. – Москва: Мир, – 1966. – 352 с.

26. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В.Бицадзе. – Москва: Наука, – 1981. – 448 с.

27. Вазов, В.И Разностные методы рещения дифференциальных уравнений в частных производных / В.И.Вазов, Дж.Форсайт. – Москва: ИЛ, – 1963. – 488 с.

28. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров. – Москва: Наука, – 1981. – 512 с.

29. Волков, Е.А. Численные методы / Е.А.Волков. – Москва: Наука, – 1982. – 256 с.
30. Воробьев, Н.Н. «Числа Фибоначчи», Популярные лекции по математике / Н.Н.Воробьев. – Москва: Наука, – 1984. – 144 с.
31. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. – Москва: Наука, – 1967. – 576 с.
32. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О.Гельфонд. – Москва: Наука, – 1967. – 376 с.
33. Годунов, С.К. Введение в теорию разностных схем / С.К.Годунов, В.С.Рябенький. – Москва: ГИФМЛ, – 1962. – 340 с.
34. Гурса, Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Москва-Ленинград, – 1936. т.I. – 592 с.
35. Гурса, Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Москва-Ленинград, – 1933. т.III, ч.I. – 276 с.
36. Гурса, Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Москва-Ленинград, – 1936. т.II. – 564 с..
37. Гушин, В.А. Об одной монотонной разностной схема второго порядка точности / В.А.Гушин, В.В.Шенников // – Москва, Журнал вычислительной математики и математической физики, – 1974. т. 14, №3. – с. 789-792.
38. Дезин, А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А.Дезин. – Москва: Наука, – 1980. – 208 с.
39. Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова / – Москва: ГИФМЛ, – 1969. – 448 с.
40. Дулан, Э. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем / Э.Дулан, Дж.Миллер, У.Щилдерс. – Москва: Мир, – 1983. – 200 с.
41. Емелянов, К.В. О разностном методы решения третьей краевой задачи для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной / – Москва, Журнал вычислительной математики и математической физики, – 1975. т.15, № 6. – с. 1457-1465.

42. Емелянов, К.В. Усечаная разностная схема для линейный сингулярно возмушений краевой задачи / – ДАН СССР, – 1982. т.262, №5. – с. 1052-1055
43. Ильин, В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов. – Москва: Наука, – 1979. – 720 с.
44. Ильин, В.А. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // – Москва, Математические заметки, – 1969. вып.2. – с. 237-248.
45. Коллатц, Л. Функционалный анализ и вычислительная математика / Л.Коллатй. – Москва: Мир, – 1969. – 448 с.
46. Кузнецов, Н.Н. Разностные схемы в пространствах сеточных распределений / – ДАН СССР, 204, 1, – 1972. – с. 27-30.
47. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И.Марчук. – Москва: Наука, – 1989. – 608 с.
48. Маслов, В.П. Канонический оператор на загранжевом многообразным с комплексным ростком и регуляризатор для псевдо дифференцианальных операторов и разностных схем / – ДАН СССР, 195, 3, – 1970. – с. 551-554.
49. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения с частными производных / В.П.Михайлов. – Москва: Наука, – 1976. – 392 с.
50. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г.Михлин. – Москва: Наука, – 1968. – 576 с.
51. Михлин, С.Г. Линейные уравнения с частными производных / С.Г.Михлин. – Москва: Высшая школа, – 1977. – 432 с.
52. Т.С.Мамиева Н.А.Алиев. Исследование Решения Задач Для Нелинейного Разностного Двухмерного Уравнения Второго Порядка // Proceedings of İAM-V.8, N.1.,- Baku Azerbaijan,-2019.- pp.35-42
53. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. – Москва: ГИФМЛ, – 1961. – 400 с.
54. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г.Петровский. – Москва: Наука, – 1970. – 232 с.

55. Понтрягин, Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин. – Москва: Наука, – 1965. – 332 с.
56. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физики и технике / К.Ректорис. – Москва: Мир, – 1985. – 592 с.
57. Рихтмайер, Р. Разностые методы рещения краевых задач / Р.Рихтмайер, К.Мортон. – Москва: Мир, – 1972. – 420 с.
58. Русанов, В.В. Разностные схемы третего порядка точности для сквазного счета разрывных решений // – ДАН СССР,– 1968. 180, 6. – с. 1303-1305.
59. Рябенкий, В.С. Метод внутренных граничных условий в теории разностных краевых задач // – УМН 26, – 1971. вып. 3, (159), – с. 105-160.
60. Самарский, А.А. Об устойчивости разностных схем / А.А.Самарский, А.В.Гулин. – Москва: Наука, – 1973. – 416 с.
61. Самарский, А.А. К теории разностных схем / – ДАН СССР, – 1965. 165, 5. – с. 1007-1010.
62. Самарский, А.А. Об устойчивости разностных схем по правым частям / А.А.Самарский, А.В.Гулин // – ДАН СССР, – 1970. 192, 2. – с. 285-288.
63. Самарский, А.А. Однородных разностные схемы на неравномерных сетках // – ЖВМ и МФ, – 1962. т. 2, №5. – с. 812-832.
64. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев. – Москва: ГИТТЛ, – 1954. – 444 с.
65. Тихонов, А.Н. Об однородных разностных схемах / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский // – ЖВМ и МФ, – 1961. т.1, №1. – с. 5-63.
66. Тихонов, А.Н. Об устойчивости разностных схем / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский // – ДАН СССР, – 1963. 149, 3. – с. 529-531.
67. Тихонов, А.Н. Однородных разностные схемы на неравномерных сетках / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский // ЖВМ и МФ, – 1962. т. 2, №5. – с. 812-832.
68. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения / Ф.Трикоми. – Москва: ИЛ, – 1962. – 350 с.
69. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М.Фихтенгольц. – Москва: Наука, – 1969. т. I. – 608 с.

70.Фрязинов, И.В. О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат / – ЖВМ и МФ, – 1971. т.II, №5. – с. 1219-1228.

71.Фрязинов, И.В. Об экономических разностных схемах решения уравнения теплопроводности в полярных, цилиндрической и сферической координатах / И.В.Фрязинов, М.И.Бакирова // ЖВМ и МФ, – 1972. т. 12, №2. – с. 352-363.

72.Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж.Холл, Дж.Уатт. – Москва: Мир, – 1979. – 312 с.

73.Шишкин, Г.И. Разностная схема для дифференциального уравнения с двумя малыми параметрами при производных / Г.И.Шишкин, В.А.Титов. – Новосибирск, Численные методы механики сплашной среды, – 1978. I, №2. – с. 145-155

74.Шишкин, Г.И. Разностная схема для решения эллиптических уравнений с малыми параметрами при производных // – Warsaw, Banach Centre Publications, – 1978. vol. 3. – с. 89-92.

75.Шишкин, Г.И. Разностная схема для сингулярного возмушенного дифференциального уравнения / – Новосибирск, Численные методы механики сплошной среды, – 1982. т.13, №2. – с. 147-164.

76.Яненко, Н.Н. О сходимости разностных схема для уравнения теплопроводности с переменными коффициентами / Н.Н.Яненко, Ю.Е.Бояринцев. – ДАН СССР, – 1961. т.139, №6, – с. 1322-1324.

77.Яненко, Н.Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопровыдности / – ДАН СССР, – 1959. т.125, №6. – с. 1207-1210.

78.Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. ГИ «Советская наука», Москва, 1958, 528 стр.

İngilis dilində

79. Agamirza E. Bashirov / A.E.Bashirov, Emira Mihirli, Yüsel Tandoğlu, Ali Özyapici // On modelinp with multiplicative differential equations, Applied

Mathematics – A journal Chinese Universities, – 2011. vol 26, № 4. pp. 425-438.
80. Aliyev, N. Discrete additive analysis / N.Aliyev, G.Bagirov, F.A.İzadi // – Tabriz, İran, Tarbiat Moallem University publishers, – 1993. – pp. 144
81. Eyler L.,"Miscellanea Berolinensia", 1743, V.7, p.193-242.
82. Aliyev, N. İnvariant Functions for Discrete Derivatives and their Applications to Solve Non Homogenous Linear and Non-linear Difference Equations / N.Aliyev, N.Azizi, M.Jahanshahi // – Jnt. Math. Forum 2, – 2007. no II. pp. 533
83. Aliyev, N.A. Functional analysis and its applications / N.A.Aliyev, T.S.Mamiyeva // "Problems for the equation with the third order additive-multiplicative discrete derivatives" dedicated to the 100-th anniversary of the Honored Scientist, professor Amir Shamil oglu Habibzade, materials of the republican scientific conference, – Baku, – 2016. – pp.17-18.
84. Aliyev, N.A. On discrete derivative and integrals / N.A.Aliyev, M.R.Fatemi // – News of Baku University, series of physico-mathematical sciences, – 2014. №36. – pp. 45-49.
85. Aliyev, N.A. On a solution of the Cauchy problem for the discrete equation with powerative-multiplicative-additive derivatives / N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov, A.M.Məmmadzada // XXXI İnternational Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018) Abstracts, – Republic of Azerbaijan, – Lankaran, – 03-07 July, – 2018. – pp 16-17.
86. Aliyev, N.A. Solution of Cauchy and boundary problems for the third compilation discrete additive-multiplicative-powerative derivative equation / N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov, A.M.Mammadzada // – Ukraina, Vestnik Київського Національного Університету Імені Тараса Шевченка, Серія Фізико-Математичні Науки, – 2018. №1, pp. 50-54.
87. Aliyev, N.A. Solution of Couchy problem for a discrete powerative / N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov, A.M.Məmmadzada // XXXV İnternational Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2020) ABSTRACTS, – Baku-Sheki, – 11-15 may, – 2020. – pp. 13-15.

88. Atkinson, F.V. Discrete and continuous boundary problems / F.V.Atkinson. – New York: Academic press, – 1964.
89. Bashirov, A. On line and double multiplicative integrals // – TWMS Journal of Applied Engineering, – 2013. Vol. 3, № 1. – pp.103-107.
90. Bashirov, A. On complex multiplicative differentiation / A.Bashirov, M.Riza // TWMS Journal of Applied Engineering, – 2011. Vol. 1, № 1. – pp.75-85.
91. Eisen, D. On the numerical analysis of a fourth-order wave equation / – SIAM J. jn Numer. Anal. – 1967. 4, 3. – pp. 457-464.
92. Fredholm İ.,"Acta Math", 1903 v.27, p.365-390
93. Hassani, O.H. Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations / O.H.Hassani, N.Aliyev // – Jnt. Math. Forum Journal for Theory and Applications, – 2008. Vol. 3. – pp. 1623-1631.
94. Mamiyeva T.S .Examples of the discrete additive derivative of the second-order discrete multiplicative derivative // – Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics V.7, No 2, Book, December, – 2019. – pp.58-64.
95. Mamiyeva T.S. Problems for the equation with third-order additive multiplicative discrete derivatives/ Memiyeva T.S, N.A.Aliyev,// Emekdar elm xadimi,professor Emir Samil oglu Hebibzadenin anadan olmasinn 100-cu il donumune hesr olunmus Funsional analiz ve onun tetbiqleri adli Respublika elmi konfransin materiallari, – Baku, -2016, -pp.17-18.
96. Mamiyeva T.S. The third compilation is a mixed discrete additive and derivative equation for discrete multiplicative investigation of the solution of issues// – Journal of contemporary Applied Mathematics, – Baku Azerbaijan, – 2020. – pp. 38-45.
97. Mamiyeva T.S. Son Cauchy and boundary value problems for the third-order discrete-multiplicative derivative equation // Advanced Mathematical Models & Applicationss-V.6.No.2., – Baku Azerbaijan, – 2021. – pp. 174-181
98. Mamiyeva T.S. Third order equation discrete multiplicative derivatives calculus method by a mathematical induction / – International Gap mathematics-engineering-science and health sciences congress, – SanliUrfa,-2021. – pp. 8-14.

99. Mamiyeva T.S., On a solution to equation with discrete multiplicative -additive derivative// –Buletinul academiei De StIInte, -Moldova, Mathematica, Number 3(82),-2016, pp. 121-124

100. Volterra, V. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari // – Mem. Sos. İtal. Sci (3), 6, – 1887, – pp. 1-4.

101. Jahanshahi M., Ahmadkhanlu A.,Aliev N., Fatemi M., Discrete additive and multiplicative differentiation and inteqration and theory invariant functions, Journal of Contemparary applied Mathematics V.1, №1, 2011,№28-35,

102. Birkhoff Garett,On product integrative,Journal of Math. And Phys.XVİ (1937),104-132

103. http: // nihan.jsoft.ws List of publications of professor Nihan A.Aliyev

104. İradi F.A., Aliyev N., Bagırov G.– Discrete Calculus By analogy. 2009, p. 154.